

Олимпиада «Физтех» по математике

10 класс, онлайн-этап, 2015/16 год

1. Сколько существует натуральных чисел N со следующим свойством: если к числу N справа приписать число 6125, то полученное число будет делиться на исходное число N ?

17

2. В параболу $y = 2x^2$ вписан прямоугольный треугольник (то есть все вершины треугольника лежат на параболе), гипотенуза которого параллельна оси Ox . Какую наибольшую длину может иметь высота этого треугольника, опущенная на гипотенузу?

0,5

3. Рассматриваются всевозможные пятизначные числа, в которых цифры 9, 7, 3, 1, 0 используются ровно по одному разу. Найдите среднее арифметическое этих чисел. Ответ округлите до целого.

99173

4. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяты соответственно точки N и M . Отрезки AM и CN пересекаются в точке P . Найдите площадь треугольника ABC , если известно, что площади треугольников ANP , CMP и CPA равны соответственно 5, 7 и 6.

858

5. Равнобокая трапеция $ABCD$ вписана в окружность Ω . Пусть M — середина боковой стороны AB , K — точка на окружности такая, что прямая MK параллельна основаниям трапеции AD и BC . Найдите радиус окружности Ω , если $BC = 13$, $AD = 17$, $MK = 4$. В ответ запишите **квадрат** радиуса.

131

6. При каком значении параметра c найдётся такой угол α , что числа $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$ являются корнями квадратного уравнения $8x^2 + 6x + c = 0$?

-1,75

7. В сумме $32 + 33 + 34 + \dots + 100$ нужно вычеркнуть несколько слагаемых так, чтобы получившаяся сумма стала равна 4455. Сколькими способами это можно сделать?

20

8. Про функцию $f(x)$ и некоторое положительное число c известно, что

$$f(x+c) = \frac{\sqrt{3}f(x)+1}{\sqrt{3}-f(x)}$$

при всех значениях x . При каком наименьшем целом значении k из интервала $(25; 50)$ можно утверждать, что $f(x+kc) = f(x)$ при всех x ?

08

9. В клубе собрались 13 путешественников. Когда зашёл разговор о стране N , оказалось, что вместе любые 6 путешественников побывали во всех городах страны N (то есть каждый город посетил хоть один из этих 6 путешественников), а любые 5 — нет (то есть найдётся город, в котором не был ни один из этих 5 путешественников). При каком минимальном количестве городов в стране N это могло быть?

12871

10. В депо три пути для формирования составов. Пути расположены с севера на юг. На пути №1 стоит состав из 32 вагонов. За одну операцию маневрирования тепловоз может перевезти один вагон с любого пути на любой другой путь. Причём он может брать и ставить вагоны только с одной (южной) стороны. За какое наименьшее количество операций тепловоз сможет собрать все вагоны на пути №1 в порядке, обратном исходному?

16