

Олимпиада «Физтех» по математике

9 класс, онлайн-этап, 2014/15 год

1. У весов сдвинута стрелка, то есть они всегда показывают на фиксированное число граммов больше (или меньше) чем истинный вес. Когда на весы положили дыню, весы показали 2 кг. Когда на весы положили арбуз, весы показали 4 кг. Когда взвесили и арбуз, и дыню, весы показали 7 кг. Сколько кг покажут весы, если на них поставить гиру в 2 кг?

1

2. Петя и пять его одноклассников стартовали одновременно в забеге на 100 метров, и Петя пришёл первым. Через 9 секунд после начала забега никто ещё не финишировал, и все его участники в сумме пробежали 290 метров. А когда Петя закончил бег, остальным пяти участникам оставалось пробежать до финиша в сумме 100 метров. Сколько метров пробежал Петя за 9 секунд? (Известно, что скорость каждого была постоянной на протяжении всей дистанции.)

89

3. Петя составляет «таблицу умножения». Слева от таблицы он написал натуральные числа от 10 до 75 включительно, сверху — от 11 до 48 включительно. После чего записал в таблицу соответствующие произведения пар чисел. Сколько из выписанных произведений являются чётными числами?

1881

4. В школьном турнире по волейболу каждая команда встречается с каждой по одному разу. После того, как к числу участников добавилась одна команда, количество встреч увеличилось на 8%. Сколько команд участвовало в первенстве после добавления команды?

27

5. Вася выписал на доску в строку 1300 букв, причем количество букв, написанное между любыми двумя гласными буквами, не равно 10. Какое наибольшее количество гласных букв могло быть выписано?

199

6. На доске написаны числа $2^2 3^{14} 5^3 7^{12}$ и $2^{11} 3^{25} 5^{12} 7^2$. За одну операцию разрешается написать на доску ещё одно натуральное число — разность каких-то двух написанных на доске. При этом запрещается записывать такие числа, которые уже есть на доске. Найдите сумму двух наименьших чисел, которые могут получиться на доске в результате применения таких операций.

009199

7. Два преподавателя получили два одинаковых набора экзаменационных билетов, написанных на карточках: по 30 карточек с билетами каждый. Первый перемешал свои карточки и положил их стопкой на стол, потом второй перемешал свои карточки и положил их стопкой сверху на первую стопку. Они подсчитали количество карточек, расположенных между парами карточек с одинаковыми билетами, и сложили полученные результаты (30 чисел). Какую наибольшую сумму они могли получить?

028

8. В треугольнике ABC со сторонами $BC = 12$, $AB = 17$, $CA = 10$ из вершины B опущены перпендикуляры BD и BE на биссектрисы углов BAC и BCA соответственно. Найдите длину отрезка DE .

9'6

9. Известно, что

$$\frac{1}{x-y} + \frac{1}{y-z} + \frac{1}{z-x} = 2,5.$$

Какое наибольшее значение может принимать сумма

$$\frac{1}{(x-y)^2} + \frac{1}{(y-z)^2} + \frac{1}{(z-x)^2}?$$

92'9

10. У Миши есть четыре банки с красками разного цвета. Сколькими различными способами он может покрасить забор, состоящий из 8 досок, так, чтобы любые две соседние доски были разных цветов и при этом он использовал краски не менее чем трёх цветов?

9928

11. Пусть $f(x) = ax^2 + bx + 2$, $a < 0$ и $f(8) = 0$. Какое наибольшее количество целочисленных решений может иметь неравенство $ax^4 + bx^2 + 2 > 0$?

9

12. На медиане AM треугольника ABC выбрана точка K так, что $\angle BAC + \angle BKC = 180^\circ$. Известно, что $AB = 10$, $CK = 4$, $AC = 8$. Найдите BK .

9