Открытая олимпиада Физтех-лицея 2015

Математика, 9 класс

1. Про некоторое натуральное число x известно, что $41^{41^{42}} = x^x$. Сколько различных простых делителей имеет x?

1

2. Дан прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AC. Известно, что $\angle BAC = 18^\circ$. Обозначим через M середину отрезка AC. Рассмотрим точку C_1, симметричную точке C относительно прямой BM. Найдите угол BC_1A.

108

3. Сколькими способами можно выбрать из 10 человек группу для участия в эксперименте, состоящую из по крайней мере одного человека (в группе может быть любое число человек от 1 до 10)?

1023

4. Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $BC = 7$ и $AD = 143$. Через точку C проведена прямая, перпендикулярная AD и пересекающая отрезок AD в точке P. Найдите DP.

68

5. Пусть a_1, a_2, … — последовательность, определяемая следующим образом:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 - 4a_n + 6} + 2.$$

Найдите a_{481}.

33

6. В треугольнике ABC угол B равен 120°. На стороне AC выбраны точки E и D такие, что $AD = AB$ и $CE = CB$. Найдите угол EBD.

30

7. Пусть a и b — действительные числа, удовлетворяющие уравнениям $a^4 + a^2b^2 + b^4 = 819$, $a^2 + ab + b^2 = 21$. Найдите значение $2ab$.

-18

8. Найдите число таких пар (x, y), что $x, y \in \mathbb{N}$, $x < y \leqslant 1300$ и НОД$(y^2 - x^2, y^3 - x^3) = 1$.

1299

9. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AC. На гипотенузе AC выбраны точки K и L, а на сторонах AB и BC выбраны точки N и M соответственно так, что четырёхугольник $KLMN$ является квадратом. Известно, что $AC = 237$. Найдите сторону квадрата.

79

10. Натуральные числа x, y, z, меньшие 100, удовлетворяют уравнениям

$$1099x + 901y + 1110z = 91314, \quad 109x + 991y + 101z = 19649.$$

Найдите $10000x + 100y + z$.

481225

11. Найдите число таких подмножеств X множества $\{1, 2, \ldots, 15\}$, что никакие два элемента X не отличаются на 1.

1597

12. Пусть a_n — остаток от деления $(n+1)^3$ на n^3. Найдите остаток при делении числа

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{2004}$$

на 2000.

74

13. Есть колода карточек, пронумерованных от 1 до 2000. Эту колоду перемешали и теперь играют в игру. Каждый шаг этой игры состоит из двух действий:

1) верхнюю карту кладём вниз колоды;

2) ту карту, которая после первого действия стала верхней, перекладываем вниз другой колоды (изначально другая колода пустая).

Оказалось, что после игры карты во второй колоде расположились следующем порядке: 1, 2, 3, 4, …, 2000. Какая карта лежала вверху первой колоды в самом начале?

1938

14. Дана окружность ω радиуса 20, в которой проведён диаметр AB. На отрезке AB взята точка P на расстоянии 4 от центра окружности ω. Найдите радиус окружности, которая касается отрезка AB в точке P и внутренним образом касается окружности ω.

9,6

15. Дан треугольник ABC. На прямой AC взяты точки X и Y, отличные от точек A и C, так, что $XA = AC = CY$. На прямой BC взяты точки K и L, отличные от точек B и C, так, что $KB = BC = CL$. На прямой AB взяты точки M и N, отличные от точек A и B, так, что $MA = AB = BN$. Оказалось, что вокруг шестиугольника $XKNYLM$ можно описать окружность. Известно что, периметр треугольника ABC равен $12\sqrt{\frac{3}{7}}$. Найдите радиус описанной вокруг шестиугольника $XKNYLM$ окружности.

4

16. Дана последовательность целых чисел $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_{19}$. Пусть $b_n = m$, если a_m — первый член последовательности, который больше или равен n. Известно, что $a_{19} = 33$. Какое наибольшее значение принимает число $a_1 + \ldots + a_{19} + b_1 + \ldots + b_{33}$?

$\boxed{660}$

17. Дан правильный 18-угольник $A_1A_2\ldots A_{18}$. На его соседних сторонах $A_{18}A_1$ и A_1A_2 выбраны точки X и Y соответственно. Оказалось, что $A_{18}X = A_1Y = 3$ и $XA_1 = YA_2 = 4$. Найдите сумму углов, под которыми виден отрезок XY из всех вершин данного 18-угольника, за исключением вершины A_1, т. е. сумму $\angle XA_2Y + \angle XA_3Y + \ldots + \angle XA_{18}Y$.

$\boxed{160}$

18. Пусть про числа a_1, a_2, $\ldots$, a_{200} известно, что

$$0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_{200}, \quad a_1 + a_2 + \ldots + a_{198} \leqslant 50, \quad a_{199} + a_{200} \leqslant 50.$$

Укажите наибольшее значение a_{199} при наибольшем значении $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{200}^2$.

$\boxed{25}$

19. Пусть S — множество делителей числа 2541^{80}. Обозначим через T подмножество S, в котором нет двух элементов, один из которых делится на другой. Какое наибольшее число элементов может быть в множестве T?

$\boxed{6561}$

20. Найдите количество пар целых чисел (m, n) таких, что $-888 \leqslant m, n \leqslant 888$ и уравнение $x^3 + y^3 = m + 3nxy$ имеет бесконечно много целых решений (x, y).

$\boxed{19}$