

Открытая олимпиада Физтех-лицея 2015

Математика, 7 класс

1. Сколько существует чётных натуральных чисел, меньших 1000000, у которых количество цифр чётно?

454545

2. Сколькими способами можно выбрать из 12 человек группу для участия в эксперименте, состоящую из по крайней мере одного человека (в группе может быть любое число человек от 1 до 12)?

4095

3. В тюрьме 700 камер, пронумерованных натуральными числами от 1 до 700. Безумный надзиратель за ночь совершает 700 обходов следующим образом: в первый обход он открывает все камеры, во второй — закрывает каждую вторую, в третий — поворачивает ключ в замке каждой третьей камеры, открывая её, если она была закрыта и закрывая, если была открыта. Действуя аналогично, он заканчивает 700 обходом, поворачивая ключ в каждой 700 камере. Сколько камер осталось открытыми после завершения им всех обходов?

92

4. Пусть a и b — действительные числа, удовлетворяющие уравнениям $a^4 + a^2b^2 + b^4 = 819$, $a^2 + ab + b^2 = 21$. Найдите значение $2ab$.

81—

5. Найдите число таких пар (x, y) , что $x, y \in \mathbb{N}$, $x < y \leq 1000$ и $\text{НОД}(y^2 - x^2, y^3 - x^3) = 1$.

666

6. На острове живет 25 человек: рыцари, лжецы и хитрецы. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут, а хитрецы отвечают на заданные им вопросы по очереди то правду, то ложь. Все жителям острова было задано три вопроса: «Вы рыцарь?», «Вы хитрец?», «Вы лжец?». На первый вопрос «Да» ответили 15 человек, на второй — 7 человек, на третий — 5 человек. Сколько хитрецов живет на этом острове?

15

7. Средний возраст одиннадцати футболистов — 26 лет. Во время игры один из игроков был удалён и средний возраст оставшихся игроков стал 25 лет. Сколько лет удалённому игроку?

98

8. Натуральные числа x, y, z , меньшие 100, удовлетворяют уравнениям

$$1099x + 901y + 1110z = 59800, \quad 109x + 991y + 101z = 44556.$$

Найдите $10000x + 100y + z$.

34316

9. В классе несколько детей, которые ходят в кружки. В каждый кружок ходит ровно 9 учеников. Каждый из учеников ходит ровно в 2 кружка. Для любых двух кружков ровно один ученик посещает оба этих кружка. Сколько учеников в классе?

45

10. Пусть N — наименьшее натуральное число, которое дает различные остатки от деления на 2, 4, ..., 500. Какой остаток число N дает при делении на 500?

867

11. В понедельник в школьную библиотеку пришло 8 учеников, во вторник — 4, в среду — 6, в четверг — 2, в пятницу — 5. Никто из учеников не был в библиотеке два дня подряд. Какое наименьшее количество учеников побывало в библиотеке с понедельника по пятницу?

11

12. Есть колода карточек, пронумерованных от 1 до 4000. Эту колоду перемешали и теперь играют в игру. Каждый шаг этой игры состоит из двух действий:

- 1) верхнюю карту кладём вниз колоды;
- 2) ту карту, которая после первого действия стала верхней, перекладываем вниз другой колоды (изначально другая колода пустая).

Оказалось, что после игры карты во второй колоде расположились следующем порядке: 1, 2, 3, 4, ..., 4000. Какая карта лежала сверху первой колоды в самом начале?

8363

13. В новый набор к командиру корабля пришло служить 18 матросов. После отплытия оказалось, что каждый матрос знаком с разным числом человек на корабле. Сколько матросов знал командир корабля?

6

14. Найдите сумму всех натуральных n , таких, что $n \leq 100$ и $\text{НОК}(16, n) = 16 \cdot n$.

2500

15. Малыш Федя расставляет по кругу натуральные числа от 1 до 100. За каждое число, которое больше суммы двух соседей, он получает конфету. Какое наибольшее количество конфет может получить Федя?

50

16. Из посёлка A в посёлок F ведет прямолинейная дорога длиной 35 км. На ней в посёлках B , C , D и E расположены автобусные остановки (в указанном порядке). Известно, что $AC = 12$ км, $BD = 11$ км, $CE = 12$ км и $DF = 16$ км. Найдите расстояние EF .

11

17. Индейцы племени Мат-и-матика умели разрезать квадрат на прямоугольники особым образом. Они разрезали его так, чтобы любая вертикальная и горизонтальная прямая, не содержащая сторон прямоугольников разрезания, пересекала ровно 70 прямоугольников. На какое наименьшее число прямоугольников индейцы могли разрезать квадрат?

272

18. В каждую клетку таблицы 7×7 ставят 0 или 1. Сколькими способами это можно сделать так, чтобы сумма чисел в каждой строке и каждом столбце была чётной?

98719476736

19. Число N равно произведению 200 простых чисел (не обязательно различных). Если каждый множитель в этом представлении увеличить на единицу, то полученное произведение будет делиться на N . Сколько различных таких натуральных N существует?

34

20. Пусть про числа $a_1, a_2, \dots, a_{400}$ известно, что

$$0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_{400}, \quad a_1 + a_2 + \dots + a_{398} \leq 200, \quad a_{399} + a_{400} \leq 200.$$

Укажите наибольшее значение a_{399} при наибольшем значении $a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_{400}^2$.

100