Открытая олимпиада Физтех-лицея 2015

Математика, 11 класс

1. Про некоторое натуральное число x известно, что $37^{37^{38}} = x^x$. Сколько различных простых делителей имеет x?

$\boxed{1}$

2. Дан прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AC. Известно, что $\angle BAC = 10^\circ$. Обозначим через M середину отрезка AC. Рассмотрим точку C_1, симметричную точке C относительно прямой BM. Найдите угол BC_1A.

$\boxed{100}$

3. Сколькими способами можно выбрать из 12 человек группу для участия в эксперименте, состоящую из по крайней мере одного человека (в группе может быть любое число человек от 1 до 12)?

$\boxed{4095}$

4. Пусть a_1, a_2, $\ldots$ — последовательность, определяемая следующим образом:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 - 4a_n + 6} + 2.$$

Найдите a_{481}.

$\boxed{33}$

5. Пусть a_1, a_2, $\ldots$ — возрастающая арифметическая прогрессия, состоящая из натуральных чисел. Известно, что $a_3 = 17$. Найдите наибольшее значение выражения $a_{a_1} + a_{a_2} + a_{a_3} + a_{a_4} + a_{a_5}$.

$\boxed{645}$

6. Натуральные числа x, y, z, меньшие 100, удовлетворяют уравнениям

$$1099x + 901y + 1110z = 143579, \quad 109x + 991y + 101z = 96253.$$

Найдите $10000x + 100y + z$.

$\boxed{529104}$

7. Вычислите значение выражения

$$[1000 \sin 0^\circ] + [1000 \sin 1^\circ] + \ldots + [1000 \sin 359^\circ],$$

где $[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее x. Например, $[5{,}2] = 5$, $[-5{,}2] = -6$, $[7] = 7$.

$\boxed{-176}$

8. Пусть a_n — остаток от деления $(n+1)^3$ на n^3. Найдите остаток при делении числа

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{5007}$$

на 5000.

$\boxed{194}$

9. Есть колода карточек, пронумерованных от 1 до 2000. Эту колоду перемешали и теперь играют в игру. Каждый шаг этой игры состоит из двух действий:

1) верхнюю карту кладём вниз колоды;

2) ту карту, которая после первого действия стала верхней, перекладываем вниз другой колоды (изначально другая колода пустая).

Оказалось, что после игры карты во второй колоде расположились следующем порядке: 1, 2, 3, 4, …, 2000. Какая карта лежала вверху первой колоды в самом начале?

$\boxed{1938}$

10. Дана окружность ω радиуса 10, в которой проведён диаметр AB. На отрезке AB взята точка P на расстоянии 4 от центра окружности ω. Найдите радиус окружности, которая касается отрезка AB в точке P и внутренним образом касается окружности ω.

$\boxed{4{,}2}$

11. В каждой вершине четырёхугольника написано вещественное число. На каждой стороне и на каждой диагонали написана сумма двух чисел, стоящих на его концах. Известно, что сумма всех чисел на сторонах и на диагоналях равна 6, а сумма их квадратов равна 10. Чему равна сумма их кубов?

$\boxed{18}$

12. Дан треугольник ABC. На сторонах AB, BC и CA взяты точки X, Y и Z соответственно таким образом, что четырёхугольник $XYCZ$ является ромбом. Известно, что $AZ = 4$, а $BY = 16$. Найдите сторону ромба.

$\boxed{8}$

13. Дана последовательность целых чисел $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_{20}$. Пусть $b_n = m$, если a_m — первый член последовательности, который больше или равен n. Известно, что $a_{20} = 89$. Какое наибольшее значение принимает число $a_1 + \ldots + a_{20} + b_1 + \ldots + b_{89}$?

$\boxed{1869}$

14. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$, в котором AB параллельно CD, DE параллельно BC, $AC = 6$ и $EC = 8$. Пусть расстояние от точки B до EC равно 3. Найдите расстояние от точки D до AC.

$\boxed{4}$

15. Дан четырёхугольник $ABCD$. Точки M и N — середины сторон AB и CD. Точки K и L — середины сторон BC и AD. Известно, что угол между прямыми MN и KL равен $60°$, и длины отрезков $MN = 8$, $KL = 9$. Найдите квадрат большей диагонали четырёхугольника $ABCD$.

$\boxed{217}$

16. Дан тетраэдр $OABC$ с прямыми плоскими углами при вершине O. В него вписан куб $OA_1C_2B_1C_1B_2MA_2$, причём точки A_1, B_1, C_1 лежат на рёбрах OA, OB, OC соответственно, точки A_2, B_2, C_2 лежат на гранях OBC, OAC, OAB соответственно, а точка M лежит на грани ABC. Известно, что $OA = \sqrt{3}$, $OB = 3\sqrt{3}$, $OC = \frac{61}{2}\sqrt{3}$. Найдите квадрат стороны куба $OA_1C_2B_1C_1B_2MA_2$.

1,607472

17. Обозначим для любого конечного непустого множества натуральных чисел S сумму его элементов через $\sigma(S)$. Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_{11}\}$ — множество из таких натуральных чисел, что $a_1 < a_2 < \ldots < a_{11}$ и для любого натурального числа $n \leqslant 1800$ найдется такое $S \subset A$, что $\sigma(S) = n$. Найдите наименьшее возможное значение a_{10}.

389

18. Дан остроугольный треугольник ABC. Обозначим через D основание высоты, опущенной из вершины A на сторону BC. Пусть M — середина BC, H — точка пересечения высот треугольника ABC. Обозначим через E точку пересечения описанной окружности ω треугольника ABC и луча MH, а через F — отличную от E точку пересечения прямой ED и окружности ω. Известно, что $AB = 15$, $AC = 12$ и $BF = 5$. Найти CF.

4

19. Пусть S — множество делителей числа 2275^{90}. Обозначим через T подмножество S, в котором нет двух элементов, один из которых делится на другой. Какое наибольшее число элементов может быть в множестве T?

8281

20. Найдите количество пар целых чисел (m, n) таких, что $-2323 \leqslant m, n \leqslant 2323$ и уравнение $x^3 + y^3 = m + 3nxy$ имеет бесконечно много целых решений (x, y).

27