Открытая олимпиада Физтех-лицея 2015

Математика, 10 класс

1. Про некоторое натуральное число x известно, что $53^{53^{54}} = x^x$. Сколько различных простых делителей имеет x?

1

2. Дан прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AC. Известно, что $\angle BAC = 20^\circ$. Обозначим через M середину отрезка AC. Рассмотрим точку C_1, симметричную точке C относительно прямой BM. Найдите угол BC_1A.

110

3. Сколькими способами можно выбрать из 10 человек группу для участия в эксперименте, состоящую из по крайней мере одного человека (в группе может быть любое число человек от 1 до 10)?

1023

4. Дана равнобедренная трапеция $ABCD$ с основаниями $BC = 7$ и $AD = 143$. Через точку C проведена прямая, перпендикулярная AD и пересекающая отрезок AD в точке P. Найдите DP.

68

5. Пусть a_1, a_2, … — последовательность, определяемая следующим образом:

$$a_1 = 1, \quad a_{n+1} = \sqrt{a_n^2 - 2a_n + 3} + 1.$$

Найдите a_{51}.

11

6. Найдите число таких пар (x, y), что $x, y \in \mathbb{N}$, $x < y \leqslant 1200$ и $\text{НОД}(y^2 - x^2, y^3 - x^3) = 1$.

1199

7. Дан равнобедренный прямоугольный треугольник ABC с гипотенузой AC. На гипотенузе AC выбраны точки K и L, а на сторонах AB и BC выбраны точки N и M соответственно так, что четырёхугольник $KLMN$ является квадратом. Известно, что $AC = 1023$. Найдите сторону квадрата.

341

8. Натуральные числа x, y, z, меньшие 100, удовлетворяют уравнениям

$$1099x + 901y + 1110z = 58103, \quad 109x + 991y + 101z = 11956.$$

Найдите $10000x + 100y + z$.

340713

9. Пусть a_n — остаток от деления $(n+1)^3$ на n^3. Найдите остаток при делении числа

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_{3003}$$

на 3000.

13

10. Есть колода карточек, пронумерованных от 1 до 4000. Эту колоду перемешали и теперь играют в игру. Каждый шаг этой игры состоит из двух действий:

1) верхнюю карту кладём вниз колоды;

2) ту карту, которая после первого действия стала верхней, перекладываем вниз другой колоды (изначально другая колода пустая).

Оказалось, что после игры карты во второй колоде расположились следующем порядке: 1, 2, 3, 4, …, 4000. Какая карта лежала вверху первой колоды в самом начале?

3938

11. Дана окружность ω радиуса 5, в которой проведён диаметр AB. На отрезке AB взята точка P на расстоянии 3 от центра окружности ω. Найдите радиус окружности, которая касается отрезка AB в точке P и внутренним образом касается окружности ω.

1,6

12. Точки A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 лежат на одной окружности в указанном порядке. Расстояния от точки A_1 до прямых A_2A_3, A_3A_4 и A_4A_5 равны 7, 10 и 5 соответственно. Найдите расстояние от точки A_1 до прямой A_2A_5.

3,5

13. В каждой вершине четырёхугольника написано вещественное число. На каждой стороне и на каждой диагонали написана сумма двух чисел, стоящих на его концах. Известно, что сумма всех чисел на сторонах и на диагоналях равна 6, а сумма их квадратов равна 8. Чему равна сумма их кубов?

12

14. Дан треугольник ABC. На прямой AC взяты точки X и Y, отличные от точек A и C, так, что $XA = AC = CY$. На прямой BC взяты точки K и L, отличные от точек B и C, так, что $KB = BC = CL$. На прямой AB взяты точки M и N, отличные от точек A и B, так, что $MA = AB = BN$. Оказалось, что вокруг шестиугольника $XKNYLM$ можно описать окружность. Известно что, периметр треугольника ABC равен $21\sqrt{\frac{3}{7}}$. Найдите радиус описанной вокруг шестиугольника $XKNYLM$ окружности.

7

15. Дана последовательность целых чисел $0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_{20}$. Пусть $b_n = m$, если a_m — первый член последовательности, который больше или равен n. Известно, что $a_{20} = 45$. Какое наибольшее значение принимает число $a_1 + \ldots + a_{20} + b_1 + \ldots + b_{45}$?

945

16. Дан выпуклый пятиугольник $ABCDE$, в котором AB параллельно CD, DE параллельно BC, $AC = 12$ и $EC = 3$. Пусть расстояние от точки B до EC равно 16. Найдите расстояние от точки D до AC.

4

17. Найдите остаток при делении числа

$$\frac{2^{2013} - 2}{2^2 - 1} + \frac{3^{2013} - 3}{3^2 - 1} + \ldots + \frac{63^{2013} - 63}{63^2 - 1}$$

на 2016.

1010

18. Дан остроугольный треугольник ABC. Обозначим через D основание высоты, опущенной из вершины A на сторону BC. Пусть M — середина BC, H — точка пересечения высот треугольника ABC. Обозначим через E точку пересечения описанной окружности ω треугольника ABC и луча MH, а через F — отличную от E точку пересечения прямой ED и окружности ω. Известно, что $AB = 6$, $AC = 4$ и $BF = 3$. Найти CF.

2

19. Пусть про числа a_1, a_2, $\ldots$, a_{400} известно, что

$$0 \leqslant a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_{400}, \quad a_1 + a_2 + \ldots + a_{398} \leqslant 200, \quad a_{399} + a_{400} \leqslant 200.$$

Укажите наибольшее значение a_{399} при наибольшем значении $a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{400}^2$.

100

20. Найдите количество пар целых чисел (m, n) таких, что $-2323 \leqslant m, n \leqslant 2323$ и уравнение $x^3 + y^3 = m + 3nxy$ имеет бесконечно много целых решений (x, y).

27