Олимпиада им. Леонарда Эйлера

Финал, 2017/18 год

Первый день

1. Петя загадал натуральное число N, Вася хочет его отгадать. Петя сообщает Васе сумму цифр числа $N+1$, затем сумму цифр числа $N+2$ и т. д. Верно ли, что рано или поздно умный Вася сможет с гарантией установить Петино число?

2. Найдите наименьшее натуральное k такое, что для некоторого натурального числа a, большего 500 000, и некоторого натурального числа b выполнено равенство

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+k} = \frac{1}{b}\,.$$

3. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равны и пересекаются в точке K. Внутри треугольников AKD и BKC выбрали точки P и Q соответственно так, что

$$\angle KAP = \angle KDP = \angle KBQ = \angle KCQ.$$

Докажите, что прямая PQ параллельна биссектрисе угла AKD.

4. В вершинах правильного 300-угольника расставлены числа от 1 до 300 по одному разу в некотором порядке. Оказалось, что для каждого числа a среди ближайших к нему 15 чисел по часовой стрелке столько же меньших a, сколько и среди 15 ближайших к нему чисел против часовой стрелки. Число, которое больше всех 30 ближайших к нему чисел, назовём *огромным*. Каково наименьшее возможное количество огромных чисел?

Второй день

5. Целые числа a, b, c и натуральное число n таковы, что $a + b + c = 1$ и $a^2 + b^2 + c^2 = 2n + 1$. Докажите, что $a^3 + b^2 - a^2 - b^3$ делится на n.

6. Среди десяти человек ровно один лжец и 9 рыцарей. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут. Каждому из них дали карточку с натуральным числом от 1 до 10, причем все числа на карточках различны. Любому можно задать вопрос: «Верно ли, что на твоей карточке написано число M?» (M может быть только натуральным числом от 1 до 10.) Верно ли, что за 17 таких вопросов можно гарантированно найти лжеца?

7. Из клетчатой доски размером 70×70 вырезали 2018 клеток. Докажите, что доска распалась не более чем на 2018 кусков. Два куска, не имеющие общих точек кроме вершин клеток, считаются не соединёнными друг с другом.

8. Вершина F параллелограмма $ACEF$ лежит на стороне BC параллелограмма $ABCD$. Известно, что $AC = AD$ и $AE = 2CD$. Докажите, что $\angle CDE = \angle BEF$.