Олимпиада им. Леонарда Эйлера

Финал, 2015/16 год

Первый день

1. В одной деревне живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Путешественник каждому жителю деревни задал два вопроса: «Сколько в деревне рыцарей?» и «На сколько отличаются количества рыцарей и лжецов?» Путешественник знает, что в деревне есть хотя бы один рыцарь. Всегда ли по полученным ответам путешественник сможет узнать, кто из жителей деревни рыцарь, а кто — лжец?

2. В стране Эйлерии 101 город. Каждые два города соединены двусторонним беспосадочным рейсом одной из 99 авиакомпаний. Известно, что из каждого города выходят рейсы всех 99 компаний. Назовём *треугольником* три города, попарно соединённых рейсами одной и той же компании. Докажите, что в Эйлерии не больше одного треугольника.

3. Дан равносторонний треугольник ABC. Точка D выбрана на продолжении стороны AB за точку A, точка E — на продолжении BC за точку C, а точка F — на продолжении AC за точку C так, что $CF = AD$ и $AC + EF = DE$. Найдите угол BDE.

4. Даны $2n$-значное натуральное число a и натуральное число k. Числа a и ka записали на ленте и каждую из двух записей разрезали на двузначные числа, начиная с последних цифр (при этом числа 00, 01, $\ldots$, 09 здесь тоже считаются двузначными; если в числе ka оказалось нечётное количество цифр, к нему спереди приписали 0). Оказалось, что у числа a полученные двузначные числа строго убывают справа налево (от младших разрядов числа a к старшим), а у числа ka — строго возрастают. Докажите, что $k \geqslant n$.

Второй день

5. Можно ли прямоугольник 1000×2016 разрезать на прямоугольники 1×2015 и трёхклеточные «уголки» так, чтобы присутствовали фигурки обоих видов?

6. В школе 30 кружков, в каждом занимаются 40 детей. Для каждого $i = 1, 2, \ldots, 30$ обозначим через n_i количество детей, занимающихся ровно в i кружках. Докажите, что в этой же школе можно организовать 40 кружков с 30 детьми в каждом так, чтобы числа n_i для этих новых кружков были бы теми же самыми.

7. Сумма неотрицательных чисел a, b, c и d равна 4. Докажите, что

$$(ab + cd)(ac + bd)(ad + bc) \leqslant 8.$$

8. Дан параллелограмм $ABCD$. На сторонах AB и BC и продолжении стороны CD за точку D выбраны соответственно точки K, L и M так, что треугольники KLM и BCA равны (именно с таким соответствием вершин). Отрезок KM пересекает отрезок AD в точке N. Докажите, что $LN \parallel AB$.