

Олимпиада им. Леонарда Эйлера

Финал, 2014/15 год

Первый день

1. Назовём *хорошими прямоугольниками* квадрат со стороной 2 и прямоугольник со сторонами 1 и 11. Докажите, что любой прямоугольник с целочисленными сторонами, большими 100, можно разрезать на хорошие прямоугольники.
2. В треугольнике ABC сторона AB больше стороны BC . На продолжении стороны BC за точку C отметили точку N так, что $2BN = AB + BC$. Пусть BS — биссектриса треугольника ABC , M — середина стороны AC , а L — такая точка на отрезке BS , что $ML \parallel AB$. Докажите, что $2LN = AC$.
3. По кругу написаны 2015 положительных чисел. Сумма любых двух рядом стоящих чисел больше суммы обратных к двум следующим за ними по часовой стрелке. Докажите, что произведение всех этих чисел больше 1.
4. На каждой стороне квадрата выбрано по 100 точек, из каждой выбранной точки внутрь квадрата проведён отрезок, перпендикулярный соответствующей стороне квадрата. Оказалось, что никакие два из проведённых отрезков не лежат на одной прямой. Отметим все точки пересечения этих отрезков. При каком наибольшем $k < 200$ может случиться так, что на каждом проведённом отрезке лежит ровно k отмеченных точек?

091 = 7

Второй день

5. 40 разбойников переправились с помощью двухместной лодки с левого берега реки на правый (некоторые рейсы, возможно, выполнялись в одиночку). Могло ли случиться, что каждая пара разбойников пересекла реку вместе ровно один раз (с левого берега на правый или с правого на левый)?

Нет

6. Натуральное число называется совершенным, если оно вдвое меньше суммы всех своих натуральных делителей: например, совершенным является число 6, так как $2 \cdot 6 = 1 + 2 + 3 + 6$. Может ли сумма всех попарных произведений натуральных делителей совершенного числа n делиться на n^2 ?

Нет

7. В стране Графинии n ($n \geq 2$) городов. Некоторые города соединены беспосадочными авиалиниями (по каждой авиалинии выполняются рейсы в обоих направлениях) таким образом, что из любого города можно самолётами (возможно, с пересадками) добраться до любого другого, но закрытие любой авиалинии нарушает это свойство. При этом из любого города выходит не больше d авиалиний. Докажите, что все города Графинии можно разбить не более чем на $\frac{n}{2} + d$ групп таким образом, чтобы каждая авиалиния соединяла города из разных групп и для любых двух групп существовало не более одной авиалинии, соединяющей города из этих групп.

8. CK — биссектриса треугольника ABC . На сторонах BC и AC выбраны точки L и T соответственно такие, что $CT = BL$ и $TL = BK$. Докажите, что треугольник с вершинами в точках C , L и T подобен исходному.