Олимпиада им. Леонарда Эйлера

Финал, 2013/14 год

Первый день

1. Докажите, что в разложение произведения десяти последовательных трёхзначных чисел на простые множители входит не больше 23 различных простых чисел.

2. На стороне AB треугольника ABC с углом в $100°$ при вершине C взяты точки P и Q такие, что $AP = BC$ и $BQ = AC$. Пусть M, N, K — середины отрезков AB, CP, CQ соответственно. Найдите угол NMK.

$\boxed{40°}$

3. На сотом году правления Казначей Бессмертный решил начать выпускать новые монеты. В этом году он выпустил в обращение неограниченный запас монет достоинством $2^{100} - 1$, на следующий год — достоинством $2^{101} - 1$, и т. д. Как только достоинство очередной новой монеты можно будет без сдачи набрать выпущенными ранее новыми монетами, Казначея сместят. На каком году его правления это случится?

$\boxed{\text{На двухсотом}}$

4. Среди 49 одинаковых на вид монет — 25 настоящих и 24 фальшивых. Для определения фальшивых монет имеется тестер. В него можно положить любое количество монет, и если среди этих монет больше половины — фальшивые, тестер подает сигнал. Как за пять тестов найти две фальшивых монеты?

Второй день

5. Петя и Вася одновременно ввели в свои калькуляторы одно и то же не равное 0 целое число. После этого каждую минуту Петя либо прибавлял к своему числу 10, либо умножал его на 2014; одновременно Вася в первом случае вычитал из своего числа 10, а во втором — делил его на 2014. Могло ли оказаться, что через некоторое время числа у Пети и Васи снова стали равными?

Да

6. Назовём натуральное число *гористым*, если в его записи есть не стоящая с краю цифра (называемая *вершиной*), которая больше всех остальных, а все остальные цифры ненулевые и сначала нестрого возрастают (то есть каждая следующая цифра больше предыдущей или равна ей) до вершины, а потом нестрого убывают (то есть каждая следующая цифра меньше предыдущей или равна ей). Например, число 12243 — гористое, а числа 3456 и 1312 — нет. Докажите, что сумма всех *стозначных* гористых чисел — составное число.

7. Десятичная запись натурального числа N составлена только из единиц и двоек. Известно, что вычёркиванием цифр из этого числа можно получить любое из 10000 чисел, состоящих из 9999 единиц и одной двойки. Найдите наименьшее возможное количество цифр в записи числа N.

10198

8. Диагональ выпуклого 101-угольника будем называть *главной*, если по одну сторону от неё лежит 50, а по другую — 49 вершин. Выбрано несколько главных диагоналей, не имеющих общих концов. Докажите, что сумма длин этих диагоналей меньше суммы длин остальных главных диагоналей.