Олимпиада им. Леонарда Эйлера

Финал, 2012/13 год

Первый день

1. 200 человек стоят по кругу. Каждый из них либо лжец, либо конформист. Лжец всегда лжёт. Конформист, рядом с которым стоят два конформиста, всегда говорит правду. Конформист, рядом с которым стоит хотя бы один лжец, может как говорить правду, так и лгать. 100 из стоящих сказали: «Я — лжец», 100 других сказали: «Я — конформист». Найдите наибольшее возможное число конформистов среди этих 200 человек.

2. Из шахматной доски размером 13×13 вырезали две противоположные угловые клетки. На оставшейся части доски отметили несколько клеток. Докажите, что на отмеченные клетки можно поставить шахматных королей так, чтобы всего королей было не больше 47, и они били все пустые отмеченные клетки. Напомним, что шахматный король бьёт все клетки, соседние с ним по вертикали, горизонтали и диагонали.

3. Диагонали выпуклого четырёхугольника $ABCD$ равны и пересекаются в точке O. Точка P внутри треугольника AOD такова, что $CD \parallel BP$ и $AB \parallel CP$. Докажите, что точка P лежит на биссектрисе угла AOD.

4. Каждое из чисел x, y и z не меньше 0 и не больше 1. Докажите неравенство

$$\frac{x^2}{1+x+xyz} + \frac{y^2}{1+y+xyz} + \frac{z^2}{1+z+xyz} \leqslant 1.$$

Второй день

5. В гандболе за победу дают 2 очка, за ничью — 1 очко, за поражение — 0 очков. 14 гандбольных команд провели турнир, где каждая команда с каждой сыграла по одному разу. Оказалось, что никакие две команды не набрали поровну очков. Могло ли случиться, что каждая из команд, занявших первые три места, проиграла каждой из команд, занявших последние три места?

6. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$, в котором $AB = CD$, на сторонах AB и CD выбраны точки K и M соответственно. Оказалось, что $AM = KC$, $BM = KD$. Докажите, что угол между прямыми AB и KM равен углу между прямыми KM и CD.

7. На доске в строчку написано n подряд идущих натуральных чисел в порядке возрастания. Под каждым из этих чисел написан его делитель, меньший этого числа и больший 1. Оказалось, что эти делители тоже образуют строчку подряд идущих натуральных чисел в порядке возрастания. Докажите, что каждое из исходных чисел больше, чем $\frac{n^k}{p_1 p_2 \ldots p_k}$, где p_1, p_2, $\ldots$, p_k — все простые числа, меньшие n.

8. 99 мудрецов сели за круглый стол. Им известно, что пятидесяти из них надели колпаки одного из двух цветов, а сорока девяти остальным — другого (но заранее неизвестно, какого именно из двух цветов 50 колпаков, а какого — 49). Каждый из мудрецов видит цвета всех колпаков, кроме своего собственного. Все мудрецы должны одновременно написать (каждый на своей бумажке) цвет своего колпака. Смогут ли мудрецы заранее договориться отвечать так, чтобы не менее 74 из них дали верные ответы?