Олимпиада им. Леонарда Эйлера

Региональный этап, 2011/12 год

Первый день

1. Назовем четырёхзначное число x *забавным*, если каждую его цифру можно увеличить или уменьшить на 1 (при этом цифру 9 можно только уменьшать, а 0 — только увеличивать) так, чтобы в результате получилось число, делящееся на x.

а) Найдите два забавных числа.

б) Найдите три забавных числа.

в) Существуют ли четыре забавных числа?

2. Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC такова, что угол ABD прямой и $BC+CD=AD$. Найдите отношение оснований $AD : BC$.

3. На столе лежат 100 одинаковых с виду монет, из которых 85 фальшивых и 15 настоящих. В вашем распоряжении есть чудо-тестер, в который можно положить две монеты и получить один из трёх результатов — «обе монеты настоящие», «обе монеты фальшивые» и «монеты разные». Можно ли за 64 таких теста найти все фальшивые монеты?

4. *Собственным делителем* числа называется любой его натуральный делитель, кроме 1 и самого числа. С составным натуральным числом a разрешается проделывать следующие операции: разделить на наименьший собственный делитель или прибавить любое натуральное число, делящееся на его наибольший собственный делитель. Если число получилось простым, то с ним ничего нельзя делать. Верно ли, что с помощью таких операций из любого составного числа можно получить число 2011?

Второй день

5. Существуют ли 10 различных рациональных чисел таких, что произведение любых двух из них — целое число, а произведение любых трёх — нет? Напомним, что рациональным называется число, равное отношению двух целых чисел.

6. По кругу выложены чёрные и белые шары, причем чёрных в два раза больше, чем белых. Известно, что среди пар соседних шаров одноцветных пар втрое больше, чем разноцветных. Какое наименьшее число шаров могло быть выложено?

7. 1000 различных положительных чисел записаны в ряд в порядке возрастания. Вася разбил эти числа на 500 пар соседних и нашел суммы чисел во всех парах. Петя разбил эти же числа на 500 пар таким образом, что между числами в каждой паре стоит ровно три других числа, и тоже нашел суммы чисел во всех парах. Докажите, что произведение сумм, найденных Петей, больше, чем произведение сумм, найденных Васей.

8. В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ углы ABC и ADC прямые. На сторонах AB, BC, CD, DA взяты точки K, L, M, N соответственно так, что $KLMN$ — прямоугольник. Докажите, что середина диагонали AC равноудалена от прямых KL и MN.