Олимпиада им. Леонарда Эйлера

Региональный этап, 2010/11 год

Первый день

1. На доске нарисованы три четырёхугольника. Петя сказал: «На доске нарисованы по крайней мере две трапеции». Вася сказал: «На доске нарисованы по крайней мере два прямоугольника». Коля сказал: «На доске нарисованы по крайней мере два ромба». Известно, что один из мальчиков сказал неправду, а двое других — правду. Докажите, что среди нарисованных на доске четырёхугольников есть квадрат. (Напомним, что трапеция — это четырёхугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие — нет.)

2. Про три положительных числа известно, что если выбрать одно из них и прибавить к нему сумму квадратов двух других, то получится одна и та же сумма, независимо от выбранного числа. Докажите, что какие-то два из исходных чисел совпадают.

3. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$ такой, что $AD = AB + CD$. Оказалось, что биссектриса угла A проходит через середину стороны BC. Докажите, что биссектриса угла D также проходит через середину BC.

4. Через центры некоторых клеток шахматной доски 8×8 проведена замкнутая ломаная без самопересечений. Каждое звено ломаной соединяет центры соседних по горизонтали, вертикали или диагонали клеток. Докажите, что в ограниченной ею части доски общая площадь чёрных кусков равна общей площади белых кусков.

Второй день

5. Бизнесмен Борис Михайлович решил устроить с трактористом Васей гонки по шоссе. Поскольку его «Лексус» едет вдесятеро быстрее Васиного трактора, он дал Васе фору и выехал через час после Васи. После того, как Васин трактор проехал ровно половину запланированной трассы, у него отвалилась рессора, поэтому оставшуюся часть пути Вася проехал вдвое медленнее, чем первую. В результате встречи с Васиной рессорой Борису Михайловичу пришлось заехать в оказавшийся рядом сервис на 4 часа, после чего он продолжил путь вдвое медленнее, чем раньше. Докажите, что в результате он отстал от Васи не менее чем на час.

6. На доске написано число 1. Если на доске написано число a, его можно заменить любым числом вида $a + d$, где d взаимно просто с a и $10 \leqslant d \leqslant 20$. Можно ли через несколько таких операций получить на доске число $18! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 18$?

7. Для четырёх различных целых чисел подсчитали все их попарные суммы и попарные произведения. Полученные суммы и произведения выписали на доску. Какое наименьшее количество различных чисел могло оказаться на доске?

8. В треугольнике ABC точки M и N — середины сторон AC и AB соответственно. На медиане BM выбрана точка P, не лежащая на CN. Оказалось, что $PC = 2PN$. Докажите, что $AP = BC$.