Олимпиада им. Леонарда Эйлера

Региональный этап, 2009/10 год

Первый день

1. Однажды барон Мюнхгаузен, вернувшись с прогулки, рассказал, что половину пути он шёл со скоростью 5 км/ч, а половину времени, затраченного на прогулку — со скоростью 6 км/ч. Не ошибся ли барон?

2. Найдите какие-нибудь семь последовательных натуральных чисел, каждое из которых можно изменить (увеличить или уменьшить) на 1 таким образом, чтобы произведение семи полученных в результате чисел равнялось произведению семи исходных чисел.

3. На гипотенузе BC прямоугольного треугольника ABC выбрана точка K так, что $AB = AK$. Отрезок AK пересекает биссектрису CL в её середине. Найдите острые углы треугольника ABC.

4. Даны натуральные числа a и b, причём $a < 1000$. Докажите, что если a^{21} делится на b^{10}, то a^2 делится на b.

Второй день

5. Незнайка выписал по кругу 11 натуральных чисел. Для каждых двух соседних чисел он посчитал их разность (из большего вычел меньшее). В результате среди найденных разностей оказалось четыре единицы, четыре двойки и три тройки. Докажите, что Незнайка где-то допустил ошибку.

6. В компании из шести человек любые пять могут сесть за круглый стол так, что каждые два соседа окажутся знакомыми. Докажите, что и всю компанию можно усадить за круглый стол так, что каждые два соседа окажутся знакомыми.

7. При каком наибольшем n можно раскрасить числа 1, 2, …, 14 в красный и синий цвета так, чтобы для любого числа $k = 1, 2, \ldots, n$ нашлись пара синих чисел, разность между которыми равна k, и пара красных чисел, разность между которыми тоже равна k?

8. Биссектрисы углов A и C трапеции $ABCD$ пересекаются в точке P, а биссектрисы углов B и D — в точке Q, отличной от P. Докажите, что если отрезок PQ параллелен основанию AD, то трапеция равнобокая.