Олимпиада им. Леонарда Эйлера

Финал, 2008/09 год

Первый день

1. У реки живёт племя Мумбо-Юмбо. Однажды со срочным известием в соседнее племя одновременно отправились молодой воин Мумбо и мудрый шаман Юмбо. Мумбо побежал со скоростью 11 км/ч к ближайшему хранилищу плотов, и затем поплыл на плоту в соседнее племя. А Юмбо, не торопясь, со скоростью 6 км/ч пошёл к другому хранилищу плотов и поплыл в соседнее племя оттуда. В итоге Юмбо приплыл раньше, чем Мумбо. Река прямолинейна, плоты плывут со скоростью течения. Эта скорость всюду одинакова и выражается целым числом км/ч, не меньшим 6. Каково наибольшее возможное её значение?

2. При всяком ли натуральном n, большем 2009, из дробей $\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n-1}$, $\frac{3}{n-2}$, $\ldots$, $\frac{n-1}{2}$, $\frac{n}{1}$ можно выбрать две пары дробей с одинаковыми суммами?

3. В треугольнике ABC стороны AB и BC равны. Точка D внутри треугольника такова, что угол ADC вдвое больше угла ABC. Докажите, что удвоенное расстояние от точки B до прямой, делящей пополам углы, смежные с углом ADC, равно $AD + DC$.

4. В стране Леонардии все дороги — с односторонним движением. Каждая дорога соединяет два города и не проходит через другие города. Департамент статистики вычислил для каждого города суммарное число жителей в городах, откуда в него ведут дороги, и суммарное число жителей в городах, куда ведут дороги из него. Докажите, что хотя бы для одного города первое число оказалось не меньше второго.

Второй день

5. Можно ли вместо звёздочек вставить в выражение

$$\text{НОК}(*,*,*) - \text{НОК}(*,*,*) = 2009$$

в некотором порядке шесть последовательных натуральных чисел так, чтобы равенство стало верным?

6. В выпуклом четырёхугольнике $ABCD$ выполнены соотношения $AB = BD$; $\angle ABD = \angle DBC$. На диагонали BD нашлась точка K такая, что $BK = BC$. Докажите, что $\angle KAD = \angle KCD$.

7. На столе лежит 10 кучек с 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 и 10 орехами. Двое играющих берут по очереди по одному ореху. Игра заканчивается, когда на столе останется 3 ореха. Если это — три кучки по одному ореху, выигрывает тот, кто ходил вторым, иначе — его соперник. Кто из игроков может выигрывать, как бы не играл соперник?

8. На бесконечной ленте выписаны в ряд числа. Первой идёт единица, а каждое следующее число получается из предыдущего прибавлением к нему наименьшей ненулевой цифры его десятичной записи. Сколько знаков в десятичной записи числа, стоящего в этом ряду на $9 \cdot 1000^{1000}$-м месте?