

# Всесибирская олимпиада по математике

10 класс, 2024 год

1. Найдите все решения в действительных числах системы уравнений:

$$\begin{cases} x - \frac{1}{y} = \frac{8}{x}, \\ y - \frac{1}{x} = \frac{8}{y}. \end{cases}$$

2. У Васи есть набор из девяти единичных кубиков, у каждого из которых на всех шести гранях записаны в некотором порядке буквы М, А, Т, Е, И, К, по одной на каждой грани. Порядок букв на разных кубиках может отличаться. Кубики можно прикладывать друг к другу гранями, если на них написаны одинаковые буквы. Сможет ли Вася хоть для какого-то набора кубиков сложить из них параллелепипед высоты и ширины 1 и длины 9 так, чтобы на каждой его грани длины 9 были записаны буквы М, А, Т, Е, М, А, Т, И, К в некотором порядке?

3. Пусть  $A = \underbrace{44\dots44}_{2n}$  — натуральное число, записанное  $2n$  четвёрками и  $B = \underbrace{88\dots88}_n$  — натуральное число, записанное  $n$  восьмёрками. Доказать, что число  $A - B$  — является точным квадратом (натурального числа).

4. Из шести пар братьев нужно составить три команды по 4 человека так, чтобы ни в одной команде не было никаких двух братьев. Сколькими различными способами это можно сделать? Спортсмены из разных пар не являются братьями.

5. В параллелограмме  $ABCD$  выбрана точка  $P$  такая, что угол  $ABP$  вдвое больше угла  $ADP$ , а угол  $DCP$  вдвое больше угла  $DAP$  (см. рисунок). Доказать, что длины отрезков  $AB$ ,  $BP$  и  $CP$  равны.

