Всесибирская олимпиада по математике

9 класс, 2022 год

1. Назовём четырёхзначное число $\overline{abcd}$ *любопытным*, если сумма двузначных чисел $\overline{ab}$ и $\overline{cd}$ равна двузначному числу $\overline{bc}$. Например, число 1978 любопытное, так как $19 + 78 = 97$. Найти количество любопытных чисел.

2. Даны натуральные числа a, b, c. Доказать, что, как минимум одно из трёх чисел $a^2 + b + c$, $b^2 + a + c$, $c^2 + a + b$ не является точным квадратом, то есть квадратом натурального числа.

3. Рассматриваются всевозможные разбиения шахматной доски 8 на 8 на домино из двух соседних по стороне клеток. Определить максимальное натуральное n такое, что для любого разбиения доски 8 на 8 на домино можно найти некоторый прямоугольник, составленный из n клеток доски, не содержащий ни одного домино целиком. Длины сторон прямоугольника в клетках могут равняться любым натуральным числам, начиная с единицы.

4. В треугольнике ABC с большей стороной BC биссектрисы пересекаются в точке I. Прямые AI, BI, CI пересекают стороны BC, CA, AB в точках D, E, F соответственно. На отрезках BD и CD выбраны точки G и H соответственно такие, что угол GID равен углу ABC, а угол HID — углу ACB. Докажите, что углы BHE и CGF равны.

5. На окружности отмечены $n > 1$ точек, называемые *позициями*, делящих её на равные дуги,. Позиции занумерованы по часовой стрелке числами от 0 до $n - 1$. Вася ставит в одну из них фишку. Далее неограниченное количество раз повторяются следующие действия, называемые *ходами*: Петя называет некоторое натуральное число, а Вася передвигает фишку по часовой стрелке или против неё на указанное Петей число позиций. Если в какой-то момент после хода Васи фишка окажется в позиции номер 0, Вася проиграет, а Петя выиграет. При каких n Петя всегда сможет выиграть, независимо от ходов Васи?