

## Всесибирская олимпиада по математике

10 класс, 2022 год

1. На шахматной доске 8 на 8 отмечены две произвольные клетки. Верно ли, что доску всегда можно разрезать по линиям сетки на две одинаковых части, каждая из которых содержит по одной отмеченной клетке?
2. Найти необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять натуральные числа  $x, y, z$ , такие, что можно записать по кругу в некотором порядке  $x \geq 1$  раз букву  $A$ ,  $y \geq 1$  раз букву  $B$  и  $z \geq 1$  раз букву  $C$  так, чтобы никакие две одинаковые буквы не были написаны рядом (не были соседними).
3. Треугольник  $ABC$  равнобедренный, с равными сторонами  $AC$  и  $BC$ . На дуге  $BC$  его описанной окружности, не содержащей вершину  $A$ , отметим произвольную точку  $D$ , отличную от  $B$  и  $C$ . Обозначим за  $E$  точку пересечения прямых  $CD$  и  $AB$ . Доказать, что прямая  $BC$  касается описанной окружности треугольника  $BDE$ .
4. Пусть для действительных чисел  $x, y, z$ , выполнено неравенство:  $x + y + z \geq xyz$ . Доказать, что для них выполнено и неравенство  $x^2 + y^2 + z^2 \geq xyz$ .
5. Какие натуральные числа  $n$  можно представить в виде  $n = [a, b] + [a, c] + [b, c]$  для некоторых натуральных  $a, b, c$ ? Здесь  $[x, y]$  обозначает наименьшее общее кратное натуральных чисел  $x$  и  $y$ .