Всесибирская олимпиада по математике

9 класс, 2021 год

1. Доказать, что в любом 100-значном натуральном числе можно вычеркнуть одну цифру так, чтобы в получившемся 99-значном числе количество семёрок, стоящих на чётных (считая слева), позициях, было не больше количества семёрок, стоящих на нечётных, (считая слева), позициях.

2. В каждой клетке таблицы 3 на 3 записано некоторое целое число так, что все восемь сумм троек чисел, записанных в клетках каждой строки, каждого столбца и каждой из двух диагоналей, равны одному числу S (то есть таблица является магическим квадратом 3 на 3). Доказать, что S делится на 3.

3. Пусть P — основание высоты, опущенной из вершины A прямоугольного треугольника ABC на его гипотенузу BC, а M — середина отрезка CP. Обозначим за E точку на продолжении стороны AB за точку B такую, что $AB = BE$. Доказать, что прямые EP и AM перпендикулярны.

4. Определим последовательность x_1, x_2, x_3, …, x_{100} следующим образом: пусть x_1 — произвольное положительное число, меньшее 1, и $x_{n+1} = x_n - x_n^2$ для всех $n = 1, 2, 3, \ldots, 99$. Докажите, что $x_1^3 + x_2^3 + \ldots + x_{99}^3 < 1$.

5. На шахматной доске 8 на 8 некоторым образом расставлены 8 ладей, ни одна из которых не бьёт другую. Доказать, что каждую из них можно сдвинуть одновременно в одну из соседних с ней по диагонали клеток таким образом, что и после сдвига ни одна из них не будет бить другую.

Напомним, что шахматная ладья бьёт все клетки горизонтали и вертикали, в которой она стоит, а клетка, соседняя с данной по диагонали — это клетка, имеющая с ней общую вершину, но не сторону. При перемещении ладья может встать на клетку, в которой ранее стояла другая ладья.