

Всесибирская олимпиада по математике

7 класс, 2021 год

1. Приведите пример натурального числа, кратного 2020, такого, что его сумма цифр тоже кратна 2020.
2. Лада и Лера нарисовали по треугольнику. Лада выбрала два угла своего треугольника, и Лера заметила, что среди углов её треугольника есть равный сумме этих двух углов. После этого Лада выбрала другую пару углов в своём треугольнике, а Лера снова нашла у своего угол, равный сумме углов этой пары. Докажите, что Лада нарисовала равнобедренный треугольник.
3. В некотором городе есть улица в форме правильного шестиугольника, в каждой из вершин которого живёт человек. Любой житель этой улицы является либо рыцарем, который всегда говорит правду, либо лжецом, который всегда лжёт. Каждый из них знает своих соседей и имена остальных (но не знает, где они живут), однако, никто ни про кого не знает, рыцарь он или лжец. Однажды Лёшка, живущий в одной из вершин, решил узнать, кто живёт в противоположном от него доме. Он может отправить письмо на имя любого человека и спросить: «Верно ли, что ты соседствуешь с тем-то?», на что получит ответ «Да» или «Нет». После этого он может отправить следующее письмо, возможно, другому человеку с вопросом про другого, и т. д. Как Лёшка может осуществить задуманное, если он собирается отправить не более четырёх писем?
4. Два пловца стартовали одновременно по соседним дорожкам в 50-метровом бассейне на дистанции 1 км. Каждый плыл со своей постоянной скоростью. Первый пловец, завершив заплыв, вышел из бассейна. Второй продолжал плыть по дистанции. Всего пловцы встретились 16 раз (когда первый догоняет второго — это тоже встреча; момент старта встречей не считается). Во сколько раз первый пловец может быть быстрее второго? Перечислите все варианты и докажите, что других нет.
5. Архипелаг состоит из n островов, между любыми двумя из которых ходит свой паром. Проезд на каждом пароме стоит одинаково в обе стороны, но при этом на любых двух различных паромов стоимости различны. Путешественник хочет прилететь на вертолёт на один из островов, а затем проплыть на $n - 1$ пароме таким образом, что каждый раз за проезд он будет платить меньше, чем платил до этого. То, что он может оказаться на каком-то острове несколько раз, его не смущает. Прилететь на вертолёт можно на любой остров, все стоимости проезда путешественнику известны. Докажите, что он сможет осуществить задуманное.