

# Всесибирская олимпиада по математике

11 класс, 2021 год

1. На сторонах  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  и  $DA$  квадрата  $ABCD$  соответственно отмечены точки  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$ , отличные от вершин. Известно, что длина стороны квадрата равна 1. Доказать, что выполнены неравенства:

$$2 \leq PQ^2 + QR^2 + RS^2 + SP^2 < 4.$$

2. Найти все натуральные  $n$ , которые можно представить в виде суммы  $n = a^2 + b^2$ , где  $a$  — минимальный делитель  $n$ , отличный от 1, и  $b$  — какой-то делитель  $n$ .

3. Найти все действительные числа  $a$ , для которых существуют три различных действительных числа  $x$ ,  $y$ ,  $z$  таких, что

$$a = x + \frac{1}{y} = y + \frac{1}{z} = z + \frac{1}{x}.$$

4. Доказать, что четыре перпендикуляра, опущенных из середин сторон произвольного вписанного четырёхугольника на его противоположные стороны, пересекаются в одной точке.

5. В некоторых клетках прямоугольной доски размера 101 на 99 сидят по одной черепашке. Каждую минуту каждая из них одновременно переползает в одну из клеток доски, соседнюю с той, в которой они находятся, по стороне. При этом, каждый следующий ход делается ими в направлении, перпендикулярном предыдущему: если предыдущий ход был горизонтальным — налево или направо, то следующий будет вертикальным — вверх или вниз, и наоборот. Какое максимальное количество черепашек может перемещаться по доске неограниченное время так, что в каждый момент в каждой клетке будет находиться не более одной черепашки?