

Всесибирская олимпиада по математике

9 класс, 2020 год

1. Для неотрицательных чисел a, b, c, d выполнены равенства:

$$\sqrt{a+b} + \sqrt{c+d} = \sqrt{a+c} + \sqrt{b+d} = \sqrt{a+d} + \sqrt{b+c}.$$

Какое максимальное количество различных может быть среди чисел a, b, c, d ?

2. Если Петя отдаст две свои тетрадки Васе, то у Васи станет в n раз больше тетрадок, чем у Пети, а если Вася отдаст n своих тетрадок Пете, то у Пети станет в два раза больше тетрадок, чем у Васи. Найти все натуральные значения n , при которых это возможно.

3. Можно ли разбить все натуральные числа от 1 до 100 включительно на десять множеств, содержащих различное количество чисел каждое и таких, что, чем больше чисел содержит множество, тем меньше сумма его элементов?

4. На сторонах AB и AD выпуклого четырёхугольника $ABCD$ отмечены точки P и Q соответственно такие, что отрезки BQ и DP делят площадь четырёхугольника пополам. Доказать, что отрезок PQ проходит через середину диагонали AC .

5. Прямоугольник 17 на 19 клеток произвольным образом разбит отрезками, идущими по линиям сетки, на меньшие прямоугольники. Доказать, что найдётся прямоугольник разбиения, все четыре расстояния (измеряемые в клетках) от каждой стороны которого до ближайшей стороны большого прямоугольника имеют одну и ту же чётность.