

**Всесибирская олимпиада по математике****11 класс, 2020 год**

1. Найти все решения системы уравнений в действительных числах:

$$\begin{cases} xy + z + t = 1, \\ yz + t + x = 3, \\ zt + x + y = -1, \\ tx + y + z = 1. \end{cases}$$

2. Пусть  $a, b, c$  — натуральные числа. Могут ли наибольшие общие делители пар чисел  $a$  и  $b$ ,  $b$  и  $c$ ,  $c$  и  $a$  равняться  $30! + 111$ ,  $40! + 234$  и  $50! + 666$  соответственно?

3. Найти максимальную длину горизонтального отрезка с концами на графике функции

$$y = x^3 - x.$$

4. Пусть точки  $O$  и  $I$  — центр описанной и вписанной окружностей треугольника  $ABC$  соответственно. Известно, что угол  $AIO$  прямой, а величина угла  $CIO$  равна  $45^\circ$ . Найти отношение сторон  $AB : BC : CA$ .

5. За одну *операцию* к любой из нескольких лежащих на столе кучек камней можно прибавлять столько же, сколько в ней уже содержится, из любой другой. Доказать, что любая начальная раскладка  $N$  камней по кучкам может быть собрана в одной куче в результате некоторого количества операций тогда и только тогда, когда  $N$  является степенью двойки.