Всесибирская олимпиада по математике

11 класс, 2019 год

1. Последовательность чисел a_n, $n = 1, 2, \ldots, 12$ такова, что $a_1 = 1$, $a_{12} = 2$, $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}+1}{a_n}$ для всех натуральных $n = 1, 2, \ldots, 10$. Найти a_4.

2. Найти все натуральные числа n, которые можно представить в виде суммы

$$n = x + y + (x, y) + [x, y]$$

для некоторых натуральных чисел x и y. Здесь (x, y) и $[x, y]$ обозначают наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел x и y соответственно.

3. Вася и Петя по очереди красят в синий и красный цвета клетки доски размера 10 на 10 клеток. Вася красит в синий любую не окрашенную на момент его хода клетку, у которой ни одна из соседних по стороне клеток уже не окрашена в синий цвет, а Петя красит в красный любую не окрашенную на момент его хода клетку. Вася ходит первым. Какое максимальное количество клеток он всегда может окрасить в синий цвет, как бы ни мешал ему Петя?

4. В прямоугольном треугольнике ABC точка M — середина гипотенузы BC, а точки P и T делят катеты AB и AC в отношении $AP : PB = AT : TC = 1 : 2$. Обозначим за K точку пересечения отрезков BT и PM, за E — точку пересечения отрезков CP и MT, и за O — точку пересечения отрезков CP и BT. Доказать, что четырёхугольник $OKME$ — вписанный.

5. Найти все решения системы уравнений в действительных числах:

$$\begin{cases} x^2 + x - 1 = y, \\ y^2 + y - 1 = z, \\ z^2 + z - 1 = x. \end{cases}$$