Всесибирская олимпиада по математике

10 класс, 2017 год

1. Решить в действительных числах систему уравнений:

$$\begin{cases} x^3 + y = 2x, \\ y^3 + x = 2y. \end{cases}$$

2. Трое играют в настольный теннис, причем игрок, проигравший партию, уступает место игроку, не участвовавшему в ней. В итоге оказалось, что первый игрок сыграл 21 партию, а второй — 10. Сколько партий сыграл третий игрок?

3. В четырёхугольнике $ABCD$ равные диагонали AC и BD пересекаются в точке O, а точки P и Q — середины сторон AB и CD соответственно. Докажите, что биссектриса угла AOD перпендикулярна отрезку PQ.

4. Назовём *змейкой* в выпуклом n-угольнике незамкнутую, не самопересекающуюся ломаную из $n-1$ звеньев, множество вершин которой совпадает с множеством всех вершин n-угольника. Найти число различных змеек в n-угольнике. (Змейки равны, если совпадают, как геометрические места точек. Например, число змеек в треугольнике равно 3.)

5. На доске написаны 10 натуральных чисел, среди которых могут быть равные, причём квадрат каждого из них делит сумму всех остальных. Какое наибольшее количество различных чисел может быть среди выписанных?