

Всесибирская олимпиада по математике

9 класс, 2016 год

1. Известно, что сумма цифр числа A равна 59, а сумма цифр числа B равна 77. Какую минимальную сумму цифр может иметь число $A + B$?
2. На острове проживают 20 человек, часть из них рыцари, которые всегда говорят правду, а остальные — лжецы, которые всегда лгут. Каждый островитянин точно знает, кто из остальных рыцарь, а кто — лжец. На вопрос приезжего, сколько рыцарей проживают на острове, первый из островитян ответил: «Ни одного», второй: «Не более одного», третий: «Не более двух», четвёртый: «Не более трёх» и т. д., двадцатый заявил: «Не более девятнадцати». Так сколько же рыцарей проживают на острове?
3. Найти величину выражения $\frac{x}{y+z} + \frac{y}{x+z} + \frac{z}{x+y}$, если известно, что $\frac{1}{y+z} + \frac{1}{x+z} + \frac{1}{x+y} = 5$ и $x + y + z = 2$.
4. В прямоугольном треугольнике ABC отмечены: точка K — середина гипотенузы AB и на катете BC точка M такая, что $BM : MC = 2$. Пусть отрезки AM и CK пересекаются в точке P . Докажите, что прямая KM касается описанной окружности треугольника AKP .
5. В футбольном турнире участвовало 10 команд, каждая из которых с каждой из остальных сыграла по одному матчу. По окончании турнира выяснилось, что для любой тройки команд найдутся две команды из этой тройки, набравших равное число очков в играх с командами из этой тройки. Доказать, что все команды можно разбить не более, чем на три подгруппы таких, что любые две команды из одной подгруппы сыграли между собой вничью. За выигрыш в футболе команда получает 3 очка, за ничью — 1 очко и за проигрыш — 0 очков.