

Всесибирская олимпиада по математике

11 класс, 2015 год

1. Из пункта A в пункт B , расстояние между которыми 40 км, в 4 часа утра вышел пешеход, а в 7:20 утра выехал велосипедист, который догнал пешехода точно посередине между A и B , после чего оба продолжили движение. Из B в A в 8:30 выехал второй велосипедист с той же скоростью, что и первый, который встретился с пешеходом спустя час после встречи пешехода с первым велосипедистом. Найти скорости пешехода и велосипедистов.

2. На сторонах AB и AC равностороннего треугольника ABC со стороной 10 взяты точки P и Q соответственно такие, что отрезок PQ касается вписанной в треугольник окружности и его длина равна 4. Найти площадь треугольника APQ .

3. Найдите множество, образуемое решениями систем уравнений

$$\begin{cases} ax + y = 2a + 3, \\ x - ay = a + 4, \end{cases}$$

при всевозможных значениях параметра a . (Для каждого значения a находится решение (x, y) данной системы и все эти решения вместе составляют искомое множество точек на координатной плоскости.)

4. Докажите, что в любой компании из 13 человек либо найдётся человек, знающий четырёх других, либо найдутся четверо, попарно не знакомых. Знакомства обоюдны — если A знает B , то и B знает A .

5. Найти все решения в натуральных числах уравнения: $2^x + 3^y = z^2$.