# Всероссийская олимпиада школьников по математике

## 9 класс, заключительный этап, 2023/24 год

**Первый день**

**1.** Петя и Вася знают лишь натуральные числа, не превосходящие $10^9 - 4000$. Петя считает хорошими числа, представимые в виде $abc + ab + ac + bc$, где $a$, $b$ и $c$ — натуральные числа, **не меньшие** 100. Вася считает хорошими числа, представимые в виде $xyz - x - y - z$, где $x$, $y$ и $z$ — натуральные числа, **бо́льшие** 100. Для кого из них хороших чисел больше?

для Васи

**2.** У натурального числа ровно 50 делителей. Может ли оказаться, что никакая разность двух различных его делителей не делится на 100?

нет

**3.** Двум мальчикам выдали по мешку картошки, в каждом мешке по 150 клубней. Ребята по очереди перекладывают картошку, каждый своим очередным ходом перекладывает ненулевое количество клубней из своего мешка в чужой. При этом они должны соблюдать *условие новой возможности*: на каждом ходе мальчик должен переложить больше клубней, чем у него было в мешке перед любым из его предыдущих ходов (если такие ходы были). Так, первым своим ходом мальчик может переложить любое ненулевое количество, а своим пятым ходом мальчик может переложить 200 клубней, если перед его первым, вторым, третьим и четвёртым ходами количества клубней в его мешке были меньше 200. Какое максимальное суммарное количество ходов могут совершить ребята?

19

**4.** Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle A + \angle D = 90^\circ$. Его диагонали пересекаются в точке $E$. Прямая $\ell$ пересекает отрезки $AB$, $CD$, $AE$ и $ED$ в точках $X$, $Y$, $Z$ и $T$ соответственно. Известно, что $AZ = CE$ и $BE = DT$. Докажите, что длина отрезка $XY$ равна диаметру окружности, описанной около треугольника $ETZ$.

**Второй день**

**5.** Квартал представляет собой клетчатый квадрат $10 \times 10$. В новогоднюю ночь внезапно впервые пошёл снег, и с тех пор каждую ночь на каждую клетку выпадало ровно по 10 см снега; снег падал только по ночам. Каждое утро дворник выбирает один ряд (строку или столбец) и сгребает весь снег оттуда на один из соседних рядов (с каждой клетки — на соседнюю по стороне). Например, он может выбрать седьмой столбец и из каждой его клетки сгрести весь снег в клетку слева от неё. Сгребать снег за пределы квартала нельзя. Вечером сотого дня года в город приедет инспектор и найдёт клетку, на которой лежит сугроб наибольшей высоты. Цель дворника — добиться, чтобы эта высота была минимальна. Сугроб какой высоты найдёт инспектор?

1120 см

**6.** Высоты остроугольного треугольника $ABC$, в котором $AB < AC$, пересекаются в точке $H$, а $O$ — центр описанной около него окружности $\Omega$. Отрезок $OH$ пересекает описанную около треугольника $BHC$ окружность в точке $X$, отличной от $O$ и $H$. Окружность, описанная около треугольника $AOX$, пересекает меньшую дугу $AB$ окружности $\Omega$ в точке $Y$. Докажите, что прямая $XY$ делит отрезок $BC$ пополам.

**7.** На доске написаны 8 различных квадратных трёхчленов; среди них нет двух, дающих в сумме нулевой многочлен. Оказалось, что если выбрать любые два трёхчлена $g_1(x)$, $g_2(x)$ с доски, то оставшиеся 6 трёхчленов можно обозначить как $g_3(x)$, $g_4(x)$, $\ldots$, $g_8(x)$ так, что у всех четырёх многочленов $g_1(x)+g_2(x)+g_3(x)+g_4(x)$, $g_5(x)+g_6(x)$ и $g_7(x)+g_8(x)$ есть общий корень. Обязательно ли все трёхчлены на доске имеют общий корень?

нет, не обязательно

**8.** 1000 детей, среди которых нет двух одинакового роста, выстроились в шеренгу. Назовём пару различных детей $(a, b)$ *хорошей*, если между ними не стоит ребёнка, рост которого больше роста одного из $a$ и $b$, но меньше роста другого. Какое наибольшее количество хороших пар могло образоваться? (Пары $(a, b)$ и $(b, a)$ считаются одной и той же парой.)

$501^2 - 3 = 250998$