Всероссийская олимпиада школьников по математике

11 класс, заключительный этап, 2023/24 год

Первый день

1. В пространстве расположен бесконечный цилиндр (т.е. геометрическое место точек, удалённых от данной прямой ℓ на данной расстояние $R > 0$). Могут ли шесть прямых, содержащих рёбра некоторого тетраэдра, иметь ровно по одной общей точке с этим цилиндром?

не могут

2. Тройку положительных чисел (a, b, c) назовём *загадочной*, если

$$\sqrt{a^2 + \frac{1}{a^2c^2} + 2ab} + \sqrt{b^2 + \frac{1}{b^2a^2} + 2bc} + \sqrt{c^2 + \frac{1}{c^2b^2} + 2ca} = 2(a + b + c).$$

Докажите, что если тройка (a, b, c) — загадочная, то тройка (c, b, a) — тоже загадочная.

3. Юрий подошёл к великой таблице майя. В таблице 200 столбцов и 2^{200} строк. Юрий знает, что в каждой клетке таблицы изображено солнце или луна, и любые две строки отличаются (хотя бы в одном столбце). Каждая клетка таблицы закрыта листом. Поднялся ветер и сдул некоторые листы: по два листа с каждой строки. Могло ли так случиться, что теперь Юрий хотя бы про 10 000 строк может узнать, что в каждой из них изображено в каждом из столбцов?

могло

4. Четырёхугольник $ABCD$, в котором нет параллельных сторон, вписан в окружность ω. Через вершину A проведена прямая $\ell_a \parallel BC$, через вершину B — прямая $\ell_b \parallel CD$, через вершину C — прямая $\ell_c \parallel DA$, через вершину D — прямая $\ell_d \parallel AB$. Четырёхугольник, последовательные стороны которого лежат на этих четырёх прямых (именно в этом порядке), вписан в окружность γ. Окружности ω и γ пересекаются в точках E и F. Докажите, что прямые AC, BD и EF пересекаются в одной точке.

Второй день

5. Квартал представляет собой клетчатый квадрат 10×10. В новогоднюю ночь внезапно впервые пошёл снег, и с тех пор каждую ночь на каждую клетку выпадало ровно по 10 см снега; снег падал только по ночам. Каждое утро дворник выбирает один ряд (строку или столбец) и сгребает весь снег оттуда на один из соседних рядов (с каждой клетки — на соседнюю по стороне). Например, он может выбрать седьмой столбец и из каждой его клетки сгрести весь снег в клетку слева от неё. Сгребать снег за пределы квартала нельзя. Вечером сотого дня года в город приедет инспектор и найдёт клетку, на которой лежит сугроб наибольшей высоты. Цель дворника — добиться, чтобы эта высота была минимальна. Сугроб какой высоты найдёт инспектор?

1120 см

6. Остроугольный неравнобедренный треугольник ABC вписан в окружность ω с центром в точке O, его высоты пересекаются в точке H. Через точку O проведена прямая, перпендикулярная AH, а через точку H — прямая, перпендикулярная AO. Докажите, что точки пересечения этих прямых со сторонами AB и AC лежат на одной окружности, которая касается окружности ω.

7. В стране $n > 100$ городов и пока нет дорог. Правительство наугад определяет стоимость строительства дороги (с двусторонним движением) между каждыми двумя городами, используя по разу все суммы от 1 до $n(n-1)/2$ талеров (все варианты равновероятны). Мэр каждого города выбирает самую дешёвую из $n-1$ возможных дорог, идущих из этого города, и она строится (это может быть взаимным желанием мэров обоих соединяемых городов или только одного из двух).

После строительства этих дорог города оказываются разбиты на M компонент связности (между городами одной компоненты связности можно добраться по построенным дорогам, возможно, с пересадками, а между городами разных компонент — нельзя). Найдите математическое ожидание случайной величины M.

$\frac{n(n-1)}{2(2n-3)}$

8. Докажите, что существует такое $c > 0$, что для любого нечётного простого $p = 2k+1$ числа 1^0, 2^1, 3^2, …, k^{k-1} дают хотя бы $c\sqrt{p}$ различных остатков при делении на p.