Всероссийская олимпиада школьников по математике

10 класс, заключительный этап, 2023/24 год

Первый день

1. Пусть p и q — различные простые числа. Дана бесконечная убывающая арифметическая прогрессия, в которой встречается каждое из чисел p^{23}, p^{24}, q^{23} и q^{24}. Докажите, что в этой прогрессии обязательно встретятся числа p и q.

□

2. Дано нечётное число $n \geqslant 3$. В клетчатом квадрате $2n \times 2n$ закрашивают $2(n-1)^2$ клеток. Какое наибольшее количество трёхклеточных уголков можно гарантированно вырезать из незакрашенной клетчатой фигуры?

$\boxed{2n-1}$

3. Дано натуральное число n. Илья задумал пару различных многочленов степени n (с вещественными коэффициентами), аналогично Саша задумал пару различных многочленов степени n. Лёня знает n; его цель — выяснить, одинаковые ли пары многочленов у Ильи и Саши. Лёня выбирает набор из k вещественных чисел $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$ и сообщает эти числа. В ответ Илья заполняет таблицу $2 \times k$: для каждого $i = 1, 2, \ldots, k$ он вписывает в две клетки i-го столбца пару чисел $P(x_i)$, $Q(x_i)$ (в любом из двух возможных порядков), где P и Q — задуманные им многочлены. Аналогичную таблицу заполняет Саша. При каком наименьшем k Лёня сможет (глядя на таблицы) наверняка добиться цели?

$\boxed{2n+1}$

4. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle A + \angle D = 90°$, его диагонали пересекаются в точке E. Прямая ℓ пересекает отрезки AB, CD, AE и ED в точках X, Y, Z и T соответственно. Известно, что $AZ = CE$ и $BE = DT$. Докажите, что длина отрезка XY не больше диаметра описанной окружности треугольника ETZ.

Второй день

5. Дана прямолинейная дорога, выложенная из зелёных и красных дощечек (дорога — отрезок, разбитый на отрезки-дощечки). Цвета дощечек чередуются; первая и последняя дощечки — зелёные. Известно, что длины всех дощечек больше сантиметра и меньше метра, а также что длина каждой следующей дощечки больше предыдущей. Кузнечик хочет пропрыгать вперёд по дороге по этим дощечкам, наступив на каждую зелёную дощечку хотя бы один раз и не наступив ни на одну красную дощечку (или границу между соседними дощечками). Докажите, что кузнечик может сделать это так, чтобы среди длин его прыжков встретилось не более 8 различных значений.

6. Дан параллелограмм $ABCD$. Точка M — середина дуги ABC окружности, описанной около треугольника ABC. На отрезке AD отмечена точка E, а на отрезке CD — точка F. Известно, что $ME = MD = MF$. Докажите, что точки B, M, E и F лежат на одной окружности.

7. Пусть даны натуральные числа x_1 и x_2. На прямой даны y_1 белых отрезков и y_2 чёрных отрезков, при этом $y_1 \geqslant x_1$ и $y_2 \geqslant x_2$. Известно, что никакие два отрезка одного цвета не пересекаются (даже не имеют общих концов). Также известно, что при любом выборе x_1 белых отрезков и x_2 чёрных отрезков обязательно какая-то пара выбранных отрезков будет пересекаться. Докажите, что

$$(y_1 - x_1)(y_2 - x_2) < x_1 x_2.$$

8. Дано натуральное $n > 2$. Маша записывает по кругу n натуральных чисел. Далее Тая делает такую операцию: между каждыми двумя соседними числами a и b она пишет некоторый делитель числа $a + b$, больший 1; затем Тая стирает исходные числа и получает новый набор из n чисел, стоящих по кругу. Всегда ли Тая может выполнять операции таким образом, чтобы через несколько операций все числа оказались равными.

$\boxed{\text{да}}$