Всероссийская олимпиада школьников по математике

9 класс, региональный этап, 2023/24 год

Первый день

1. У Олега есть набор из 2024 различных клетчатых прямоугольников размеров 1×1, 1×2, 1×3, $\ldots$, 1×2024 (по одному прямоугольнику каждого размера). Может ли он, выбрав некоторые из них, составить какой-нибудь клетчатый квадрат площади больше 1?

Не может

2. На координатной плоскости нарисована парабола $y = x^2$. Для данного числа $k > 0$ рассматриваются трапеции, вписанные в эту параболу (то есть все вершины трапеции лежат на параболе), у которых основания параллельны оси абсцисс, а произведение длин оснований равно k. Докажите, что диагонали всех таких трапеций проходят через одну точку.

3. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Для игры в настольный теннис навылет всех жителей острова разделили на две команды A и B, причем в A жителей было больше, чем в B. Начали игру два игрока разных команд; после каждой партии проигравший игрок навсегда выходил из игры, и его заменял другой (еще не игравший) член его команды. Проиграла команда, все члены которой вышли из игры. После турнира каждого члена команды A спросили:

«Правда ли, что в какой-то игре ты проиграл лжецу?»,

а каждого члена команды B спросили:

«Правда ли, что ты выиграл хотя бы у двух рыцарей?».

Все ответы оказались утвердительными. Какая команда победила — A или B?

Победила A

4. В ряд выписаны по одному разу все натуральные числа от 1 до 1000 в каком-то порядке. Докажите, что можно выбрать несколько стоящих подряд выписанных чисел, сумма которых больше 100000, но не превосходит 100500.

5. Дан равнобедренный треугольник ABC ($AB = BC$). На продолжениях боковых сторон AB и BC за точку B отмечены точки D и E соответственно, а на основании AC отмечена точка F, причем $AC = DE$ и $\angle CFE = \angle DEF$. Докажите, что $\angle ABC = 2\angle DFE$.

Второй день

6. На доске записано 7 различных чисел, сумма которых равна 10. Петя умножил каждое из них на сумму остальных шести и записал 7 полученных произведений в тетрадь. Оказалось, что в тетради встречаются только четыре различных числа. Найдите одно из чисел, записанных на доске.

$\boxed{-20}$

7. На окружности длиной 1 метр отмечена точка. Из нее в одну и ту же сторону одновременно побежали два таракана с различными постоянными скоростями. Каждый раз, когда быстрый таракан догонял медленного, медленный мгновенно разворачивался, не меняя скорости. Каждый раз, когда они встречались лицом к лицу, быстрый мгновенно разворачивался, не меняя скорости. На каком расстоянии от отмеченной точки могла произойти их сотая встреча?

$\boxed{\text{На нулевом}}$

8. На стороне BC остроугольного треугольника ABC выбраны точки P и Q так, что $BP = PQ = QC$. Точки X и Y выбраны соответственно на отрезках AC и AB так, что $PX \perp AC$ и $QY \perp AB$. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника ABC равноудалена от прямых XQ и YP.

9. Правильный треугольник T со стороной 111 разбит прямыми, параллельными его сторонам, на правильные треугольники со стороной 1. Все вершины этих треугольников, кроме центра треугольника T, отмечены. Назовем множество из нескольких отмеченных точек **линейным**, если все эти точки лежат на одной прямой, параллельной стороне T. Сколько существует способов разбить все отмеченные точки на 111 линейных множеств? (Способы, отличающиеся порядком множеств, считаются одинаковыми.)

$\boxed{2^{3\cdot 37^2} = 2^{4107}}$

10. Существует ли натуральное число $n > 10^{100}$ такое, что десятичные записи чисел

$$n^2 \quad \text{и} \quad (n+1)^2$$

отличаются перестановкой цифр? (Иначе говоря, в десятичных записях чисел n^2 и $(n+1)^2$ должно быть поровну цифр 0, поровну цифр 1, …, поровну цифр 9.)

$\boxed{\text{Да}}$