Всероссийская олимпиада школьников по математике

11 класс, региональный этап, 2023/24 год

Первый день

1. У Олега есть набор из 2024 различных клетчатых прямоугольников размеров 1×1, 1×2, 1×3, …, 1×2024 (по одному прямоугольнику каждого размера). Может ли он, выбрав некоторые из них, составить какой-нибудь клетчатый квадрат площади больше 1?

Не может

2. Пусть $x_1 < x_2 < \ldots < x_{2024}$ — возрастающая последовательность натуральных чисел. При $i = 1, 2, \ldots, 2024$ обозначим

$$p_i = \left(x_1 - \frac{1}{x_1}\right)\left(x_2 - \frac{1}{x_2}\right)\ldots\left(x_i - \frac{1}{x_i}\right).$$

Какое наибольшее количество натуральных чисел может содержаться среди чисел p_1, p_2, …, p_{2024}?

2023

3. По кругу стоят 100 белых точек. Аня и Боря красят по очереди по одной еще не покрашенной точке в красный или синий цвет, начинает Аня. Аня хочет, чтобы в итоге оказалось как можно больше пар разноцветных соседних точек, а Боря — чтобы оказалось как можно меньше таких пар. Какое наибольшее число пар разноцветных соседних точек Аня может гарантировать себе независимо от игры Бори?

50

4. На отрезке XY как на диаметре построена полуокружность и выбрана произвольная точка Z на этом отрезке. Девять лучей из точки Z делят развернутый угол XZY на 10 равных частей и пересекают полуокружность в точках A_1, A_2, …, A_9 соответственно (в порядке обхода от X к Y). Докажите, что сумма площадей треугольников A_2ZA_3 и A_7ZA_8 равна площади четырехугольника $A_2A_3A_7A_8$.

5. Уравнение

$$t^4 + at^3 + bt^2 = (a+b)(2t-1)$$

имеет положительные решения $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$. Докажите, что $t_1t_4 > t_2t_3$.

Второй день

6. У учителя есть 100 гирь массами 1 г, 2 г, ..., 100 г. Он хочет раздать Пете и Васе по 30 гирь так, чтобы выполнялось следующее условие:

- никакие 11 Петиных гирь не уравновешиваются никакими 12 Васиными гирями;
- никакие 11 Васиных гирь не уравновешиваются никакими 12 Петиными гирями.

Сможет ли учитель это сделать?

Сможет

7. График G_1 квадратного трехчлена

$$y = px^2 + qx + r$$

с вещественными коэффициентами пересекает график G_2 квадратного трехчлена $y = x^2$ в точках A и B. Касательные в точках A и B к графику G_2 пересекаются в точке C. Оказалось, что точка C лежит на графике G_1. Найдите все возможные значения p.

2

8. В пространстве расположены отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 с общей серединой M. Оказалось, что сфера ω, описанная около тетраэдра $MA_1B_1C_1$, касается плоскости ABC в точке D. Точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Докажите, что $MO = MD$.

9. Правильный треугольник T со стороной 111 разбит прямыми, параллельными его сторонам, на правильные треугольники со стороной 1. Все вершины этих треугольников, кроме центра треугольника T, отмечены. Назовем множество из нескольких отмеченных точек **линейным**, если все эти точки лежат на одной прямой, параллельной стороне T. Сколько существует способов разбить все отмеченные точки на 111 линейных множеств? (Способы, отличающиеся порядком множеств, считаются одинаковыми.)

$2^{3\cdot 37^2} = 2^{4107}$

10. Дано натуральное число $n > 100$. Изначально на доске написано число 1. Каждую минуту Петя представляет число, записанное на доске, в виде суммы двух неравных положительных несократимых дробей, а Вася оставляет на доске только одну из этих двух дробей. Докажите, что Петя может добиться того, чтобы знаменатель оставшейся дроби через n минут не превышал $2^n + 50$ вне зависимости от действий Васи.