# Всероссийская олимпиада школьников по математике

## 11 класс, муниципальный этап, 2023/24 год

**1.** Каждое из натуральных чисел $a$, $b$, $c$, $d$ не превосходит 6. Найдите наибольшее возможное значение выражения

$$a+\frac{1}{b+\frac{1}{c+\frac{1}{d}}}.$$

$\boxed{\frac{55}{8}=6{,}875}$

**2.** Дана правильная десятиугольная призма $A_1A_2\ldots A_{10}B_1B_2\ldots B_{10}$. Некоторая плоскость $\alpha$ пересекает $n$ её рёбер, не проходя ни через одну из точек $A_1$, …, $A_{10}$, $B_1$, …, $B_{10}$.

1. Какое наименьшее натуральное значение может принимать $n$?
2. Какое наибольшее натуральное значение может принимать $n$?

$\boxed{1)\ 3;\ 2)\ 12}$

**3.** Назовём *хорошей* пару $(a,b)$ натуральных чисел, лежащих на отрезке $[100;240]$, если число $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ является целым. Сколько существует хороших пар?

$\boxed{30}$

**4.** На урок физкультуры пришли девочки и мальчики. У учителя было 47 волейбольных мячей. Сначала он выдал каждой девочке по одному мячу, а все оставшиеся мячи поделил поровну между мальчиками (при этом каждый ребёнок получил хотя бы один мяч). Затем учитель поделил всех мальчиков на группы, одинаковые по количеству человек (возможно, группа была всего одна). В каждую группу он захотел добавить по одной девочке, но девочек оказалось на одну больше, чем групп.

1. Какое наибольшее количество мальчиков могло быть на уроке?
2. Сколько девочек могло быть на уроке? Укажите все возможные варианты.

$\boxed{1)\ 45;\ 2)\ 2,\ 3,\ 24}$

**5.** Клетчатую таблицу назовём *разнообразной*, если её клетки раскрашены в чёрный и белый цвет так, что во всех строках разное количество чёрных клеток, а также во всех столбцах разное количество чёрных клеток.

Пару натуральных чисел $(m,n)$ назовём *подходящей*, если существует разнообразная таблица $m\times n$, причём $10\leqslant m\leqslant 20$ и $10\leqslant n\leqslant 20$. Сколько существует подходящих пар? (Если числа $m$ и $n$ различны, то пары $(m,n)$ и $(n,m)$ считаются различными.)

$\boxed{31}$

**6.** В окружность $\omega$ вписана трапеция $ABCD$ такая, что $BC \parallel AD$, $AD = 14$ и $BC = 9$. Пусть $M$ — середина дуги $AD$ окружности $\omega$, не содержащей точек $B$ и $C$. Прямая $\ell$ касается $\omega$ в точке $C$. Пусть $H$ — основание перпендикуляра, опущенного из $M$ на $\ell$. Найдите длину отрезка $CH$.

4,5

**7.** Многочлен $P(x)$ с действительными коэффициентами, отличный от константы, таков, что для всех действительных $x$ верно

$$P(x^2) = x(1 + x^2)P(x).$$

1. Найдите $P(-1)$.
2. Найдите $\frac{P(5)}{P(2)}$.

1) 0; 2) 20

**8.** Есть поле, разделённое на две половины: левую и правую. Изначально на левой лежит $a$ камней, а на правой — $b$ камней. Юра и Яша играют в следующую игру, делая ходы по очереди. Первым ходит Юра.

Игрок в свой ход должен переложить с одной половины поля на другую один или несколько камней, причём больше, чем соперник переложил на предыдущем ходу (первым ходом можно переложить любое количество камней, большее 0). Проигрывает тот, кто не может сделать ход.

1. Какое наибольшее количество ходов может быть сделано в игре, если $a = 7$ и $b = 10$?
2. Рассмотрим все пары натуральных чисел $(a, b)$ такие, что $1 \leqslant a \leqslant 10$ и $1 \leqslant b \leqslant 10$. Для скольких из них Юра имеет выигрышную стратегию? (Если числа $a$ и $b$ различны, то пары $(a, b)$ и $(b, a)$ считаются различными.)

1) 17; 2) 90