Всероссийская олимпиада школьников по математике

10 класс, заключительный этап, 2022/23 год

Первый день

1. Прямые, содержащие стороны данного остроугольного треугольника T, покрасили в красный, зелёный и синий цвета. Затем эти прямые повернули вокруг центра описанной окружности данного треугольника по часовой стрелке на угол $120°$ (прямая сохраняет свой цвет после поворота). Докажите, что три точки пересечения одноцветных прямых являются вершинами треугольника, равного T.

2. У 100 школьников есть стопка из 101 карточки, которые пронумерованы числами от 0 до 100. Первый школьник перемешивает стопку, затем берёт сверху из получившейся стопки по одной карточке, и при каждом взятии карточки (в том числе при первом) записывает на доску среднее арифметическое чисел на всех взятых им на данный момент карточках. Так он записывает 100 чисел, а когда в стопке остаётся одна карточка, он возвращает карточки в стопку, и далее всё то же самое, начиная с перемешивания стопки, проделывает второй школьник, потом третий, и т. д. Докажите, что среди выписанных на доске 10000 чисел найдутся два одинаковых.

3. Даны натуральные числа a и b такие, что $a > 2b$. Существует ли многочлен $P(x)$ степени больше 0 с коэффициентами из множества $\{0, 1, 2, \ldots, b-1\}$ такой, что $P(a)$ делится на $P(b)$?

4. С одной стороны теннисного стола выстроилась очередь из n девочек, а с другой — из n мальчиков. И девочки, и мальчики пронумерованы числами от 1 до n в том порядке, как они стоят. Первую партию играют девочка и мальчик с номерами 1, а далее после каждой партии проигравший встаёт в конец своей очереди, а победивший играет со следующим. Через некоторое время оказалось, что каждая девочка сыграла ровно одну партию с каждым мальчиком. Докажите, что если N нечётно, то в последней партии играли девочка и мальчик с нечётными номерами.

Второй день

5. Найдите наибольшее натуральное число n, для которого произведение чисел n, $n+1$, $n+2$, $\ldots$, $n+20$ делится на квадрат какого-то одного из них.

6. Квадрат 100×100 разбит на квадраты 2×2. Потом его разбивают на доминошки (прямоугольники 1×2 и 2×1). Какое наименьшее количество доминошек могло оказаться внутри квадратов разбиения?

7. Дана трапеция $ABCD$, в которой $AD \parallel BC$, а лучи AB и DC пересекаются в точке G. Общие внешние касательные к окружностям, описанным около треугольников ABC и ACD, пересекаются в точке E. Общие внешние касательные к окружностям, описанным около треугольников ABD и BCD, пересекаются в точке F. Докажите, что точки E, F и G лежат на одной прямой.

8. Дано число $a \in (0,1)$. Положительные числа x_0, x_1, $\ldots$, x_n удовлетворяют условиям

$$x_0 + x_1 + \ldots + x_n = n + a$$

и

$$\frac{1}{x_0} + \frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n} = n + \frac{1}{a}.$$

Найдите наименьшее значение выражения $x_0^2 + x_1^2 + \ldots + x_n^2$.