Всероссийская олимпиада школьников по математике

9 класс, региональный этап, 2022/23 год

Первый день

1. Велодорожка состоит из двух участков: сначала идет асфальтовый, а затем песчаный. Петя и Вася стартовали порознь (сначала Петя, а затем Вася), и каждый проехал всю дорожку. Скорость каждого мальчика на каждом из двух участков была постоянной. Оказалось, что они поравнялись в середине асфальтового участка, а также в середине песчаного. Кто из мальчиков затратил на всю дорожку меньше времени?

2. Дан бумажный треугольник, длины сторон которого равны 5 см, 12 см и 13 см. Можно ли разрезать его на несколько (больше одного) многоугольников, у каждого из которых площадь (измеренная в см^2) численно равна периметру (измеренному в см)?

3. Дано натуральное число n. На клетчатой доске $2n \times 2n$ расставили $2n$ ладей так, что никакие две не стоят в одной горизонтали или одной вертикали. После этого доску разрезали по линиям сетки на две связных части, симметричных друг другу относительно центра доски. Какое наибольшее количество ладей могло оказаться в одной из частей? (Клетчатая фигура называется *связной*, если по этой фигуре от любой ее клетки можно добраться до любой другой, переходя каждый раз в соседнюю по стороне клетку.)

4. Даны натуральные числа a, b и c. Ни одно из них не кратно другому. Известно, что число $abc + 1$ делится на $ab - b + 1$. Докажите, что $c \geqslant b$.

5. Четырехугольник $ABCD$ вписан в окружность γ. Оказалось, что окружности, построенные на отрезках AB и CD как на диаметрах, касаются друг друга внешним образом в точке S. Пусть точки M и N — середины отрезков AB и CD соответственно. Докажите, что перпендикуляр ℓ к прямой MN, восставленный в точке M, пересекает прямую CS в точке, лежащей на γ.

Второй день

6. Для натурального числа n обозначим через S_n наименьшее общее кратное всех чисел 1, 2, $\ldots$, n. Существует ли такое натуральное число m, что $S_{m+1} = 4S_m$?

7. На доску записали 99 чисел, среди которых нет равных. В тетрадку выписали $\dfrac{99 \cdot 98}{2}$ чисел — все разности двух чисел с доски (каждый раз из большего числа вычитали меньшее). Оказалось, что в тетрадке число 1 записано ровно 85 раз. Пусть d — наибольшее число, записанное в тетрадке. Найдите наименьшее возможное значение d.

8. Дан остроугольный треугольник ABC, в котором $AB < BC$. Пусть M и N — середины сторон AB и AC соответственно, а H — основание высоты, опущенной из вершины B. Вписанная окружность касается стороны AC в точке K. Прямая, проходящая через K и параллельная MH, пересекает отрезок MN в точке P. Докажите, что в четырехугольник $AMPK$ можно вписать окружность.

9. Найдите наибольшее число m такое, что для любых положительных чисел a, b и c, сумма которых равна 1, выполнено неравенство

$$\sqrt{\frac{ab}{c+ab}} + \sqrt{\frac{bc}{a+bc}} + \sqrt{\frac{ca}{b+ca}} \geqslant m.$$

10. Куб $100 \times 100 \times 100$ разбит на миллион единичных кубиков; в каждом кубике расположена лампочка. Три грани большого куба, имеющие общую вершину, окрашены: одна красным, другая синим, а третья зеленым. Назовем *столбцом* набор из 100 кубиков, образующих блок $1 \times 1 \times 100$. У каждого из 30 000 столбцов есть одна окрашенная торцевая клетка; в этой клетке стоит переключатель — нажатие на этот переключатель меняет состояние всех 100 лампочек в столбце (выключенная лампочка включается, а включенная выключается). Изначально все лампочки были выключены. Петя нажал на несколько переключателей, получив ситуацию, в которой ровно k лампочек горят. Докажите, что после этого Вася может нажать на несколько переключателей так, чтобы ни одна лампочка не горела, использовав не более $k/100$ переключателей с красной грани.