Всероссийская олимпиада школьников по математике

11 класс, региональный этап, 2022/23 год

Первый день

1. Можно ли число 2023 представить в виде суммы трех натуральных чисел a, b, c таких, что a делится на $b+c$ и $b+c$ делится на $b-c+1$?

2. Даны различные вещественные числа a_1, a_2, a_3 и b. Оказалось, что уравнение

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)=b$$

имеет три различных вещественных корня c_1, c_2, c_3. Найдите корни уравнения

$$(x+c_1)(x+c_2)(x+c_3)=b.$$

3. В городе N прошли 50 городских олимпиад по разным предметам, при этом в каждой из этих олимпиад участвовало ровно 30 школьников, но не было двух олимпиад с одним и тем же составом участников. Известно, что для любых 30 олимпиад найдется школьник, который участвовал во всех этих 30 олимпиадах. Докажите, что найдется школьник, который участвовал во всех 50 олимпиадах.

4. На доску записывают пары чисел. Сначала на доску записали пару чисел $(1,2)$. Если на доске написана пара чисел (a,b), то на доску можно дописать пару $(-a,-b)$, а также пару $(-b,a+b)$. Кроме того, если на доске написаны пары чисел (a,b) и (c,d), то на доску можно дописать пару $(a+c,b+d)$. Могла ли через некоторое время на доске оказаться пара $(2022,2023)$? Порядок чисел в паре существенен, например, пары чисел $(1,2)$ и $(2,1)$ считаются различными.

5. В остроугольном неравнобедренном треугольнике ABC проведена высота AH, медиана AM, а также отмечен центр O его описанной окружности ω. Отрезки OH и AM пересекаются в точке D, прямые AB и CD — в точке E, прямые BD и AC — в точке F. Лучи EH и FH пересекают окружность ω в точках X и Y. Докажите, что прямые BY, CX и AH пересекаются в одной точке.

Второй день

6. Для натурального числа n обозначим через S_n наименьшее общее кратное всех чисел 1, 2, $\ldots$, n. Существует ли такое натуральное число m, что $S_{m+1} = 4S_m$?

7. Назовем два числа *почти равными*, если они равны или отличаются друг от друга не более, чем на единицу. Верно ли, что из любого прямоугольника с натуральными сторонами можно вырезать какой-нибудь прямоугольник с натуральными сторонами, площадь которого почти равна половине площади исходного прямоугольника? Стороны вырезаемого прямоугольника не обязательно параллельны сторонам исходного прямоугольника.

8. Точка O — центр описанной окружности остроугольного неравнобедренного треугольника ABC. На биссектрисе угла ABC внутри треугольника ABC отмечена точка D, а на отрезке BD — точка E так, что $AE = BE$ и $BD = CD$. Точки P и Q — центры окружностей, описанных около треугольников AOE и COD соответственно. Докажите, что точки A, C, P и Q лежат на одной прямой или на одной окружности.

9. Даны ненулевые числа a, b, c. Докажите, что выполняется неравенство

$$\left|\frac{b}{a} - \frac{b}{c}\right| + \left|\frac{c}{a} - \frac{c}{b}\right| + |bc + 1| > 1.$$

10. В стране $2n$ городов (n — натуральное), некоторые из них соединены двусторонними беспосадочными авиалиниями. Из любого города можно попасть в любой другой, возможно, с пересадками. Президент хочет разделить страну на две области и включить каждый город в одну из двух областей. При этом авиалинии разделятся на k межобластных и m внутриобластных. Докажите, что президент может добиться того, чтобы выполнялось неравенство $k - m \geqslant n$.