Всероссийская олимпиада школьников по математике

10 класс, региональный этап, 2022/23 год

Первый день

1. В таблице 6×6 изначально записаны нули. За одну операцию можно выбрать одну клетку и заменить число, стоящее в ней, на любое целое число. Можно ли за 8 операций получить таблицу, в которой все 12 сумм чисел в строках и столбцах будут различными положительными числами?

2. Дан бумажный треугольник, длины сторон которого равны 5 см, 12 см и 13 см. Можно ли разрезать его на несколько (больше одного) многоугольников, у каждого из которых площадь (измеренная в см^2) численно равна периметру (измеренному в см)?

3. В городе N прошли 50 городских олимпиад по разным предметам, при этом в каждой из этих олимпиад участвовало ровно 30 школьников, но не было двух олимпиад с одним и тем же составом участников. Известно, что для любых 30 олимпиад найдется школьник, который участвовал во всех этих 30 олимпиадах. Докажите, что найдется школьник, который участвовал во всех 50 олимпиадах.

4. Даны натуральные a, b, c такие, что $a > 1$, $b > c > 1$, а число $abc + 1$ делится на $ab - b + 1$. Докажите, что b делится на a.

5. В остроугольном треугольнике ABC проведена высота BD и отмечена точка пересечения высот H. Серединный перпендикуляр к отрезку HD пересекает окружность, описанную около треугольника BCD, в точках P и Q. Докажите, что $\angle APB + \angle AQB = 180°$.

Второй день

6. Для натурального числа n обозначим через S_n наименьшее общее кратное всех чисел 1, 2, $\ldots$, n. Существует ли такое натуральное число m, что $S_{m+1} = 4S_m$?

7. Петя взял некоторые трехзначные натуральные числа a_0, a_1, $\ldots$, a_9 и написал на доске уравнение

$$a_9x^9 + a_8x^8 + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = *.$$

Докажите, что Вася сможет вместо звездочки написать некоторое 30-значное натуральное число так, чтобы получившееся уравнение имело целый корень.

8. Биссектриса угла A параллелограмма $ABCD$ пересекает сторону BC в точке K. На стороне AB выбрана точка L так, что $AL = CK$. Отрезки AK и CL пересекаются в точке M. На продолжении отрезка AD за точку D отмечена точка N. Известно, что четырехугольник $ALMN$ — вписанный. Докажите, что $\angle CNL = 90°$.

9. Дано натуральное число k. Вдоль дороги стоят n столбов через равные промежутки. Миша покрасил их в k цветов и для каждой пары одноцветных столбов, между которыми нет других столбов того же цвета, вычислил расстояние между ними. Все эти расстояния оказались различны. При каком наибольшем n так могло оказаться?

10. Докажите, что для любых трех положительных вещественных чисел x, y, z выполнено неравенство

$$(x-y)\sqrt{3x^2+y^2} + (y-z)\sqrt{3y^2+z^2} + (z-x)\sqrt{3z^2+x^2} \geqslant 0.$$