

Всероссийская олимпиада школьников по математике

9 класс, заключительный этап, 2021/22 год

Первый день

1. Назовём *главными делителями* составного числа n два наибольших его натуральных делителя, отличных от n . Составные натуральные числа a и b таковы, что главные делители числа a совпадают с главными делителями числа b . Докажите, что $a = b$.
2. Биссектрисы треугольника ABC пересекаются в точке I , внешние биссектрисы его углов B и C пересекаются в точке J . Окружность ω_b с центром в точке O_b проходит через точку B и касается прямой CI в точке I . Окружность ω_c с центром в точке O_c проходит через точку C и касается прямой BI в точке I . Отрезки O_bO_c и IJ пересекаются в точке K . Найдите отношение IK/KJ .
3. В строку выписаны 200 натуральных чисел. Среди любых двух соседних чисел строки правое либо в 9 раз больше левого, либо в 2 раза меньше левого. Может ли сумма всех этих 200 чисел равняться 24^{2022} ?
4. В классе 18 детей. Родители решили подарить детям из этого класса торт. Для этого они сначала узнали у каждого ребёнка площадь куска, который он хочет получить. После этого они заказали торт квадратной формы, площадь которого в точности равна сумме 18 названных чисел. Однако, увидев торт, дети захотели, чтобы их куски тоже были квадратными. Родители могут резать торт разрезами, параллельными сторонам торта (разрезы не обязаны начинаться или оканчиваться на стороне торта). Для какого наибольшего k родители гарантированно могут вырезать из заказанного торта k квадратных кусков, которые можно выдать k детям, чтобы каждый из них получил желаемое?

Второй день

5. Дана бесконечная последовательность чисел a_1, a_2, \dots , в которой нет двух равных членов. Отрезок $a_i, a_{i+1}, \dots, a_{i+m-1}$ этой последовательности назовём монотонным отрезком длины m , если выполнены неравенства $a_i < a_{i+1} < \dots < a_{i+m-1}$ или неравенства $a_i > a_{i+1} > \dots > a_{i+m-1}$. Оказалось, что для каждого натурального k член a_k содержится в некотором монотонном отрезке длины $k+1$. Докажите, что существует натуральное N такое, что последовательность a_N, a_{N+1}, \dots монотонна, т. е. $a_N < a_{N+1} < \dots$ или $a_N > a_{N+1} > \dots$.
6. Для какого наименьшего натурального числа a существуют целые числа b и c такие, что квадратный трёхчлен ax^2+bx+c имеет два различных положительных корня, не превосходящих $\frac{1}{1000}$?
7. В стране 998 городов. Некоторые пары городов соединены двусторонними авиарейсами. Согласно закону, между любой парой городов должно быть не больше одного рейса. Другой закон требует, чтобы для любой группы городов было не больше $5k+10$ рейсов, соединяющих два города этой группы, где k — количество городов в группе. В настоящий момент законы соблюдены. Докажите, что министерство развития может ввести несколько новых рейсов так, чтобы законы по-прежнему соблюдались, а общее количество рейсов в стране стало равным 5 000.
8. В треугольник ABC вписана окружность ω , касающаяся стороны BC в точке K . Окружность ω' симметрична окружности ω относительно точки A . Точка A_0 выбрана так, что отрезки BA_0 и CA_0 касаются ω' . Пусть M — середина стороны BC . Докажите, что прямая AM делит отрезок KA_0 пополам.