Всероссийская олимпиада школьников по математике

11 класс, заключительный этап, 2021/22 год

Первый день

1. Назовём *главными делителями* составного числа n два наибольших его натуральных делителя, отличных от n. Составные натуральные числа a и b таковы, что главные делители числа a совпадают с главными делителями числа b. Докажите, что $a = b$.

2. На плоскости нарисованы графики функций $y = \sin x$ и $y = \operatorname{tg} x$, а также оси координат. Как циркулем и линейкой построить какую-нибудь прямую, которая касается графика синуса как выше оси абсцисс (Ox), так и ниже (и, возможно, имеет ещё несколько точек пересечения)?

3. На плоскости фиксирован остроугольный треугольник ABC с наибольшей стороной BC. Пусть PQ — произвольный диаметр его описанной окружности, причём точка P лежит на меньшей дуге AB, а точка Q — на меньшей дуге AC. Точки X, Y и Z — основания перпендикуляров, опущенных из точки P на прямую AB, из точки Q на прямую AC и из точки A на прямую PQ. Докажите, что центр описанной окружности треугольника XYZ лежит на фиксированной окружности (не зависящей от выбора точек P и Q).

4. Дано натуральное число $n > 4$. На плоскости отмечены n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Василий проводит по одному все отрезки, соединяющие пары отмеченных точек. На каждом шаге, проводя очередной отрезок S, Василий помечает его наименьшим натуральным числом, которым ещё не помечен ни один отрезок, имеющий с S общий конец. Для какого наибольшего k Василий может действовать так, чтобы пометить какой-то отрезок числом k?

Второй день

5. На доске написаны 11 целых чисел (не обязательно различных). Может ли оказаться, что произведение любых пяти из них больше, чем произведение остальных шести?

6. Дано натуральное число n. Саша утверждает, что для любых n лучей в пространстве, никакие два из которых не имеют общих точек, он сможет отметить на этих лучах k точек, лежащих на одной сфере. При каком наибольшем k его утверждение верно?

7. Для натурального числа Nя рассмотрим все различные точные квадраты, которые можно получить из N вычёркиванием одной цифры в его десятичной записи. Докажите, что количество этих квадратов не превосходит некоторой величины, не зависящей от N.

8. Из каждой вершины треугольника ABC провели внутрь него два луча, красный и синий, симметричные относительно биссектрисы соответствующего угла. Около треугольников, образованных при пересечении лучей одного цвета, описали окружности. Докажите, что если описанная окружность треугольника ABC касается одной из этих окружностей, то она касается и другой.