

Всероссийская олимпиада школьников по математике

10 класс, заключительный этап, 2021/22 год

Первый день

1. Назовём *главными делителями* составного числа n два наибольших его натуральных делителя, отличных от n . Составные натуральные числа a и b таковы, что главные делители числа a совпадают с главными делителями числа b . Докажите, что $a = b$.
2. На стороне BC остроугольного треугольника ABC отмечены точки D и E так, что $BD = CE$. На дуге DE описанной окружности треугольника ADE , не содержащей точку A , нашлись такие точки P и Q , что $AB = PC$ и $AC = BQ$. Докажите, что $AP = AQ$.
3. Изначально на доске написана пара чисел $(1, 1)$. Если для некоторых x и y на доске написана одна из пар $(x, y - 1)$ и $(x + y, y + 1)$ то можно дописать другую. Аналогично, если на доске написана одна из пар (x, xy) и $(\frac{1}{x}, y)$, то можно дописать другую. Докажите, что в каждой выписанной паре первое число будет положительным.
4. Дано натуральное число $n > 4$. На плоскости отмечены n точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Василий проводит по одному все отрезки, соединяющие пары отмеченных точек. На каждом шаге, проводя очередной отрезок S , Василий помечает его наименьшим натуральным числом, которым ещё не помечен ни один отрезок, имеющий с S общий конец. Для какого наибольшего k Василий может действовать так, чтобы пометить какой-то отрезок числом k ?

Второй день

5. На доске написаны 11 целых чисел (не обязательно различных). Может ли оказаться, что произведение любых пяти из них больше, чем произведение остальных шести?

6. Дано натуральное число $n > 5$. На кольцевой полоске бумаги написана последовательность из нулей и единиц. Для каждой последовательности w из n нулей и единиц посчитали количество способов вырезать из полоски фрагмент, на котором написана w . Оказалось, что наибольшее количество M достигается на последовательности $11\underbrace{00\dots0}_{n-2}$, а наименьшее (возможно, нулевое) — на последовательности $\underbrace{00\dots0}_{n-2}11$. Докажите, что есть и другая последовательность из n нулей и единиц, встречающаяся ровно M раз.

7. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ отмечена точка E , а на стороне AD — точка F так, что описанная окружность треугольника ABE касается отрезка CF . Докажите, что описанная окружность треугольника CDF касается прямой AE .

8. Для натурального числа N рассмотрим все различные точные квадраты, которые можно получить из N вычёркиванием одной цифры в его десятичной записи. Докажите, что количество этих квадратов не превосходит некоторой величины, не зависящей от N .