Всероссийская олимпиада школьников по математике

11 класс, региональный этап, 2021/22 год

Первый день

1. Петя написал на доске десять натуральных чисел, среди которых нет двух равных. Известно, что из этих десяти чисел можно выбрать три числа, делящихся на 5. Также известно, что из написанных десяти чисел можно выбрать четыре числа, делящихся на 4. Может ли сумма всех написанных на доске чисел быть меньше 75?

2. Дан квадратный трехчлен $P(x)$. Докажите, что существуют попарно различные числа a, b и c такие, что выполняются равенства

$$P(b+c) = P(a), \quad P(c+a) = P(b), \quad P(a+b) = P(c).$$

3. В треугольной пирамиде $ABCD$ на её гранях BCD иACD нашлись соответственно точки A' и B' такие, что $\angle AB'C = \angle AB'D = \angle BA'C = \angle BA'D = 120°$. Известно, что прямые AA' и BB' пересекаются. Докажите, что точки A' и B' равноудалены от прямой CD.

4. В компании некоторые пары людей дружат (если A дружит с B, то и B дружит с A). Оказалось, что при любом выборе 101 человека из этой компании количество пар дружащих людей среди них нечётно. Найдите наибольшее возможное количество человек в такой компании.

5. Пусть S — 100-элементное множество, состоящее из натуральных чисел, не превосходящих 10 000. Отметим в пространстве все точки, каждая из координат которых принадлежит множеству S. К каждой из 1 000 000 отмеченных точек (x, y, z) прикрепим шарик с написанным на нём числом $\dfrac{x^2+y^2+z^2}{xy+yz+zx}$. На каком наибольшем количестве шариков может быть написано число, равное 2?

Второй день

6. Последовательность чисел $a_1, a_2, \ldots, a_{2022}$ такова, что $a_n - a_k \geqslant n^3 - k^3$ для любых n и k таких, что $1 \leqslant n \leqslant 2022$ и $1 \leqslant k \leqslant 2022$. При этом $a_{1011} = 0$. Какие значения может принимать a_{2022}?

7. Произведение цифр натурального числа n равно x, а произведение цифр числа $n+1$ равно y. Может ли так случиться, что произведение цифр некоторого натурального числа m равно $y-1$, а произведение цифр числа $m+1$ равно $x-1$?

8. В вершины правильного 100-угольника поставили 100 фишек, на которых написаны номера 1, 2, …, 100, именно в таком порядке по часовой стрелке. За ход разрешается обменять местами некоторые две фишки, стоящие в соседних вершинах, если номера этих фишек отличаются не более чем на k. При каком наименьшем k серией таких ходов можно добиться расположения, в котором каждая фишка сдвинута на одну позицию по часовой стрелке (по отношению к своему начальному положению)?

9. Трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC вписана в окружность ω. Диагонали AC и BD пересекаются в точке P. Точка M — середина отрезка AB. Серединный перпендикуляр к отрезку AD пересекает окружность ω в точках K и L. Точка N — середина дуги CD описанной окружности треугольника PCD, не содержащей точку P. Докажите, что точки K, L, M и N лежат на одной окружности.

10. Даны неотрицательные числа a, b, c, d такие, что $a+b+c+d=8$. Докажите, что

$$\frac{a^3}{a^2+b+c} + \frac{b^3}{b^2+c+d} + \frac{c^3}{c^2+d+a} + \frac{d^3}{d^2+a+b} \geqslant 4.$$