Всероссийская олимпиада школьников по математике

10 класс, региональный этап, 2021/22 год

Первый день

1. Петя написал на доске десять натуральных чисел, среди которых нет двух равных. Известно, что из этих десяти чисел можно выбрать три числа, делящихся на 5. Также известно, что из написанных десяти чисел можно выбрать четыре числа, делящихся на 4. Может ли сумма всех написанных на доске чисел быть меньше 75?

2. Дан квадратный трехчлен $P(x)$. Докажите, что существуют попарно различные числа a, b и c такие, что выполняются равенства

$$P(b+c) = P(a), \quad P(c+a) = P(b), \quad P(a+b) = P(c).$$

3. У Васи есть n конфет нескольких сортов, где $n > 145$. Известно, что если из данных n конфет выбрать любую группу, содержащую не менее 145 конфет (в частности, можно выбрать группу из всех данных n конфет), то существует такой сорт конфет, что выбранная группа содержит в точности 10 конфет этого сорта. Найдите наибольшее возможное значение n.

4. Пусть $P(x) = a_n x^2 + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, где n — натуральное число. Известно, что числа a_0, a_1, $\ldots$, a_n — целые, при этом $a_n \neq 0$, $a_{n-k} = a_k$ при всех $k = 0, 1, \ldots, n$, и $a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 = 0$. Докажите, что число $P(2022)$ делится на квадрат некоторого натурального числа, большего 1.

5. В окружность Ω вписан шестиугольник $AECDBF$. Известно, что точка D делит дугу BC пополам, а треугольники ABC и DEF имеют общую вписанную окружность. Прямая BC пересекает отрезки DF и DE в точках X и Y , а прямая EF пересекает отрезки AB и AC в точках Z и T соответственно. Докажите, что точки X, Y, T, Z лежат на одной окружности.

Второй день

6. На доске написаны три последовательных нечётных числа. Может ли сумма остатков от деления этих трёх чисел на 2022 равняться некоторому простому числу?

7. Дан вписанный четырёхугольник $ABCD$, в котором $\angle A = 2\angle B$. Биссектриса угла C пересекает сторону AB в точке E. Докажите, что $AD + AE = BE$.

8. На плоскости отмечены N точек. Любые три из них образуют треугольник, величины углов которого в градусах выражаются натуральными числами. При каком наибольшем N это возможно?

9. В вершины правильного 100-угольника поставили 100 фишек, на которых написаны номера $1, 2, \ldots, 100$, именно в таком порядке по часовой стрелке. За ход разрешается обменять местами некоторые две фишки, стоящие в соседних вершинах, если номера этих фишек отличаются не более чем на k. При каком наименьшем k серией таких ходов можно добиться расположения, в котором каждая фишка сдвинута на одну позицию по часовой стрелке (по отношению к своему начальному положению)?

10. Докажите, что существует натуральное число b такое, что при любом натуральном $n > b$ сумма цифр числа $n!$ не меньше 10^{100}.