

Всероссийская олимпиада школьников по математике

9 класс, муниципальный этап, 2021/22 год

1. Для натурального числа a произведение $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot a$ обозначается как $a!$.

1. Найдите наименьшее натуральное число m такое, что $m!$ делится на $23m$.
2. Найдите наименьшее натуральное число n такое, что $n!$ делится на $33n$.

2. В четырёх классах школы учатся более 70 детей, все они пришли на собрание параллели (других детей на собрании не было).

Каждую пришедшую девочку спросили: «Сколько пришло человек из твоего класса, включая тебя?»

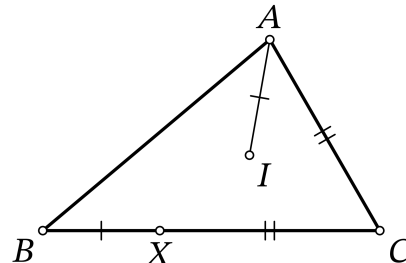
Каждого пришедшего мальчика спросили: «Сколько пришло мальчиков из твоего класса, включая тебя?»

Среди ответов встретились числа 7, 9, 10, 12, 15, 16, 19 и 21 (все дети ответили верно).

- Сколько детей учатся в самом большом классе параллели?
- Сколько девочек пришло на собрание параллели?

3. Точка I — точка пересечения биссектрис треугольника ABC . На стороне BC отметили точку X . Оказалось, что $AI = BX$, $AC = CX$, $\angle ABC = 42^\circ$.

1. Сколько градусов составляет угол BIX ?
2. Сколько градусов составляет угол BCA ?



4. Фома и Ерёма ехали по прямой дороге в Москву на повозке с постоянной скоростью.

- В 12:00 Фома спросил: «Сколько вёрст до Москвы?»
- Ерёма ответил: «82».
- В 13:00 Фома спросил: «Сколько вёрст до Москвы?»
- Ерёма ответил: «71».
- В 15:00 Фома спросил: «Сколько вёрст до Москвы?»
- Ерёма ответил: «46».

Известно, что Ерёма каждый раз округлял расстояние до ближайшего целого, а если таких было два — то до любого на свой выбор.

В 16:00 Фома снова спросил: «Сколько вёрст до Москвы?» В этот раз Ерёма уже дал точный ответ, не округляя его. Что ответил Ерёма?

5. Про действительные ненулевые числа a, b, c известно, что

$$a^2 - bc = b^2 - ac = c^2 - ab.$$

1. Какие положительные значения может принимать выражение

$$\frac{a}{b+c} + \frac{2b}{a+c} + \frac{4c}{a+b}?$$

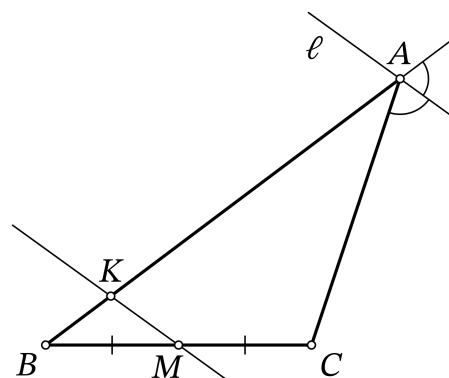
Укажите все возможные варианты. Если выражение не может принимать положительные значения, то в качестве ответа напишите 0.

2. Какие отрицательные значения может принимать выражение

$$\frac{a}{b+c} + \frac{2b}{a+c} + \frac{4c}{a+b}?$$

Укажите все возможные варианты. Если выражение не может принимать отрицательные значения, то в качестве ответа напишите 0.

6. Дан треугольник ABC , точка M — середина стороны BC . Пусть ℓ — биссектриса внешнего угла A треугольника ABC . Прямая, проходящая через M и параллельная ℓ , пересекает сторону AB в точке K . Найдите длину отрезка AK , если $AB = 23$ и $AC = 8$.



7. На доску выписаны числа $1, 2, 3, \dots, 57$. Какое наибольшее количество чисел среди них можно выбрать так, чтобы никакие два выбранных числа не отличались ровно в 2,5 раза?

8. На плоскости отмечено 36 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Некоторые пары отмеченных точек соединены отрезком так, что из каждой отмеченной точки выходит не более 3 отрезков.

Какое наибольшее количество различных замкнутых 4-звенных ломаных может получиться?

Вершинами ломаной могут быть только отмеченные точки, а звеньями — только проведённые отрезки. Неважно, где у ломаной начало и как она ориентирована: например, если для некоторых 4 отмеченных точек A, B, C, D проведены отрезки AB, BC, CD, DA , то $ABCD, BCDA, CDAB, DABC, ADCB, BADC, CBAD, DCBA$ — это одна и та же ломаная.