

Всероссийская олимпиада школьников по математике

11 класс, муниципальный этап, 2021/22 год

1. По кругу выписаны 12 *различных* натуральных чисел, одно из которых равно 1. Любые два соседних числа отличаются либо на 10, либо на 7. Какое наибольшее значение может принимать наибольшее выписанное число?

2. Пусть α и β — действительные корни уравнения $x^2 - x - 2021 = 0$, причём $\alpha > \beta$. Обозначим

$$A = \alpha^2 - 2\beta^2 + 2\alpha\beta + 3\beta + 7.$$

Найдите наибольшее целое число, не превосходящее A .

3. Пусть k_1 — наименьшее натуральное число, являющееся корнем уравнения

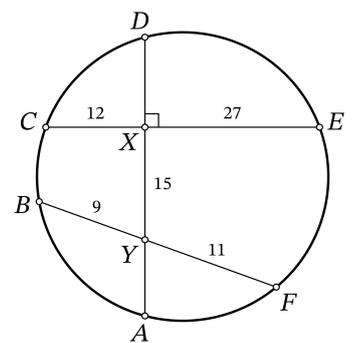
$$\sin k^\circ = \sin 334k^\circ.$$

1. Найдите k_1 .

2. Найдите наименьший корень этого же уравнения, являющийся натуральным числом, большим k_1 .

4. В спортивной школе занимается 55 человек, каждый из которых либо теннисист, либо шахматист. Известно, что нет четырёх шахматистов, которые имели бы поровну друзей среди теннисистов. Какое наибольшее количество шахматистов может заниматься в этой школе?

5. На окружности по часовой стрелке расположены точки A, B, C, D, E, F , как изображено на рисунке. Хорды AD и CE пересекаются в точке X под прямым углом, хорды AD и BF пересекаются в точке Y . Известно, что $CX = 12$, $XE = 27$, $XY = 15$, $BY = 9$, $YF = 11$.

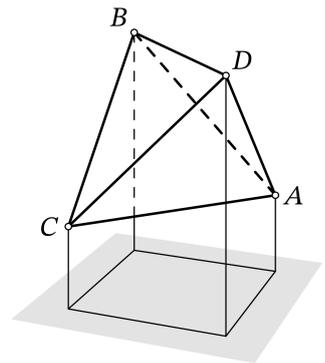


1. Найдите длину отрезка AD .

2. Найдите радиус окружности.

6. Дан набор чисел $\{-1, -2, -3, \dots, -26\}$. На доску выписали всевозможные подмножества данного набора, в которых есть хотя бы 2 числа. Для каждого выписанного подмножества вычислили произведение всех чисел, принадлежащих данному подмножеству. Чему равна сумма всех этих произведений?

7. Все вершины правильного тетраэдра $ABCD$ находятся по одну сторону от плоскости α . Оказалось, что проекции вершин тетраэдра на плоскость α являются вершинами некоторого квадрата. Найдите значение величины AB^2 , если известно, что расстояния от точек A и B до плоскости α равны 17 и 21 соответственно.



8. В каждой клетке полоски $1 \times N$ стоит либо плюс, либо минус. Ваня умеет совершать следующую операцию: выбрать любые три клетки (не обязательно последовательные), одна из которых находится ровно посередине между двумя другими клетками, и поменять три знака в этих клетках на противоположные. Число N назовём *позитивным*, если из расстановки из N минусов Ваня такими операциями может получить расстановку из N плюсов.

Рассмотрим числа 3, 4, 5, \dots , 1400. Сколько среди них позитивных?