Всероссийская олимпиада школьников по математике

9 класс, заключительный этап, 2020/21 год

Первый день

1. На окружности отмечено 1000 точек, каждая окрашена в один из k цветов. Оказалось, что среди любых пяти попарно пересекающихся отрезков, концами которых являются 10 различных отмеченных точек, найдутся хотя бы три отрезка, у каждого из которых концы имеют разные цвета. При каком наименьшем k это возможно?

2. Пусть n — натуральное число. Целое число $a > 2$ назовем *n-разложимым*, если $a^n - 2^n$ делится на каждое число вида $a^d + 2^d$, где d — натуральный делитель n, отличный от n. Найдите все составные натуральные n, для которых существует n-разложимое число.

3. На прямой отмечено $n + 1$ различных отрезков; одна из точек прямой принадлежит всем этим отрезкам. Докажите, что среди отмеченных отрезков можно выбрать различные отрезки I и J, пересекающихся по отрезку длины, не меньшей $\frac{n-1}{n}d$, где d — длина отрезка I.

4. На стороне AB остроугольного треугольника ABC отмечена точка D, а на продолжении стороны BC за точку C — точка E. Оказалось, что прямая, проходящая через E и параллельная AB, касается окружности, описанной около треугольника ADC. Докажите, что одна из касательных, проведенных из точки E к описанной окружности треугольника BCD, отсекает от угла ABE треугольник, подобный треугольнику ABC.

Второй день

5. Числа $b > 0$ и a таковы, что квадратный трехчлен $x^2 + ax + b$ имеет два различных корня, ровно один из которых лежит на отрезке $[-1; 1]$. Докажите, что ровно один из этих корней лежит в интервале $(-b; b)$.

6. Внутри неравнобедренного остроугольного треугольника ABC, в котором $\angle ABC = 60°$, отмечена точка T так, что $\angle ATB = \angle BTC = \angle ATC = 120°$. Медианы треугольника пересекаются в точке M. Прямая TM пересекает вторично окружность, описанную около треугольника ATC, в точке K. Найдите TM/MK.

7. Натуральные числа $n > 20$ и $k > 1$ таковы, что n делится на k^2. Докажите, что найдутся натуральные числа a, b и c такие, что $n = ab + bc + ca$.

8. Сотне мудрецов предложили следующее испытание. Их по очереди (в заранее известном порядке) приводят в зал. В зале смотритель предлагает мудрецу на выбор каких-то два различных числа из набора 1, 2, 3. Мудрец выбирает ровно одно из них, сообщает выбранное число смотрителю и уходит из зала. При этом до своего выбора мудрец имеет право узнать у смотрителя, какое из чисел выбрал каждый из двух предыдущих мудрецов (второй мудрец имеет право узнать про первого). Во время испытания любое общение между мудрецами запрещено. Если в конце сумма всех 100 чисел, выбранных мудрецами, окажется равной 200, то мудрецы провалили испытание; иначе они его выдержали. Докажите, что мудрецы могут заранее договориться о своих действиях так, чтобы гарантированно выдержать испытание.