Всероссийская олимпиада школьников по математике

11 класс, заключительный этап, 2020/21 год

Первый день

1. При некоторых натуральных $n > m$ число n оказалось представимо в виде суммы 2021 слагаемых, каждое из которых равно некоторой целой неотрицательной степени числа m, а также в виде суммы 2021 слагаемых, каждое из которых равно некоторой целой неотрицательной степени числа $m+1$. При каком наибольшем m это могло произойти (хоть при каком-то $n > m$)?

2. Пусть $P(x)$ — ненулевой многочлен степени n с неотрицательными коэффициентами такой, что функция $y = P(x)$ — нечетная. Может ли оказаться так, что для различных точек A_1, A_2, …, A_n на графике G: $y = P(x)$ выполняются условия: касательная к графику G в точке A_1 проходит через точку A_2, касательная в точке A_2 проходит через точку A_3, …, касательная в точке A_n — через точку A_1?

3. В языке три буквы — Ш, У и Я. *Словом* называется последовательность из 100 букв, ровно 40 из которых — гласные (то есть У или Я), а остальные 60 — буква Ш. Какое наибольшее количество слов можно выбрать так, чтобы у любых двух выбранных слов хотя бы в одной из ста позиций одновременно стояли гласные, причём различные?

4. В треугольнике ABC биссектрисы AA_1 и CC_1 пересекаются в точке I. Прямая, проходящая через точку B параллельно AC пересекает лучи AA_1 и CC_1 в точках A_2 и C_2 соответственно. Точка O_a — центр описанной окружности треугольника AC_1C_2, точка O_c — центр описанной окружности треугольника CA_1A_2. Докажите, что $\angle O_aBO_c = \angle AIC$.

Второй день

5. Дана бесконечная клетчатая плоскость. Учительница и класс из 30 учеников играют в игру, делая ходы по очереди — сначала учительница, затем по очереди все ученики, затем снова учительница, и т. д. За один ход можно покрасить единичный отрезок, являющийся границей между двумя соседними клетками. Дважды красить отрезки нельзя. Учительница побеждает, если после хода одного из 31 игроков найдется клетчатый прямоугольник 1×2 или 2×1 такой, что у него вся граница покрашена, а единичный отрезок внутри него не покрашен. Смогут ли ученики помешать учительнице победить?

6. В тетраэдре $SABC$ длины всех шести рёбер различны. Точка A' в плоскости SBC симметрична точке S относительно серединного перпендикуляра к отрезку BC. Точка B' в плоскости SAC и точка C' в плоскости SAB определяются аналогично. Докажите, что плоскости $AB'C'$, $A'BC'$, $A'B'C$ и ABC имеют общую точку.

7. Найдите все перестановки $(a_1, a_2, \ldots, a_{2021})$ чисел 1, 2, ..., 2021 такие, что при любых натуральных m, n, удовлетворяющих $|m-n| > 20^{21}$, выполняется неравенство:

$$\sum_{i=1}^{2021} \text{НОД}\,(m+i, n+a_i) < 2|m-n|.$$

(*Перестановка* $(a_1, a_2, \ldots, a_{2021})$ — это последовательность, в которой каждое из чисел 1, 2, ..., 2021 встречается ровно по одному разу.)

8. У каждой из 100 девочек есть по 100 шариков; среди этих 10000 шариков есть по 100 шариков 100 различных цветов. Две девочки могут обменяться, передав друг другу по шарику. Они хотят добиться того, чтобы у каждой девочки было по 100 разноцветных шариков. Докажите, что они могут добиться этого такой среди обменов, чтобы любой шарик участвовал не более чем в одном обмене.