Всероссийская олимпиада школьников по математике

10 класс, заключительный этап, 2020/21 год

Первый день

1. На стороне BC параллелограмма $ABCD$ отмечены точки E и F, причем E лежит между B и F. Диагонали AC и BD пересекаются в точке O. Прямые AE и DF касаются окружности, описанной около треугольника AOD. Докажите, что они касаются и окружности, описанной около треугольника EOF.

2. Найдите все наборы натуральных чисел x_1, x_2, …, x_{20} такие, что

$$x_{i+2}^2 = \text{НОК}\,(x_{i+1}, x_i) + \text{НОК}\,(x_i, x_{i-1})$$

при $i = 1, 2, \ \ldots, 20$, где $x_0 = x_{20}$, $x_{21} = x_1$, $x_{22} = x_2$.

3. В стране N городов. Некоторые пары городов связаны двусторонними авиалиниями, каждая пара не более, чем одной. Каждая авиалиния принадлежит одной из k компаний. Оказалось, что из любого города можно попасть в любой другой (возможно, с пересадками), но при закрытии всех авиалиний любой из компаний это свойство нарушается. Какое наибольшее количество авиалиний (при произвольных данных N и k) могло быть в этой стране?

4. Дано натуральное число $n \geqslant 4$ и $2n+4$ карточки, пронумерованные числами 1, 2, …, $2n+4$. На карточке с номером m написано вещественное число a_m, причем $[a_m] = m$. Докажите, что можно выбрать 4 карточки так, чтобы сумма чисел на первых двух карточках отличалась от суммы чисел на двух других карточках менее чем на $\frac{1}{n-\sqrt{n/2}}$.

Второй день

5. Дана бесконечная клетчатая плоскость. Учительница и класс из 30 учеников играют в игру, делая ходы по очереди — сначала учительница, затем по очереди все ученики, затем снова учительница, и т. д. За один ход можно покрасить единичный отрезок, являющийся границей между двумя соседними клетками. Дважды красить отрезки нельзя. Учительница побеждает, если после хода одного из 31 игроков найдется клетчатый прямоугольник 1×2 или 2×1 такой, что у него вся граница покрашена, а единичный отрезок внутри него не покрашен. Докажите, что учительница сможет победить.

6. Дан многочлен $P(x)$ степени $n > 1$ с вещественными коэффициентами. Известно, что уравнение $P(P(P(x))) = P(x)$ имеет ровно n^3 различных вещественных корней. Докажите, что эти n^3 корней можно разбить на две группы с равными средними арифметическими.

7. Натуральные числа $n > 20$ и $k > 1$ таковы, что n делится на k^2. Докажите, что найдутся натуральные a, b и c такие, что $n = ab + bc + ca$.

8. В окружность ω вписан пятиугольник $ABCDE$. Прямая CD пересекает лучи AB и AE в точках X и Y соответственно. Отрезки EX и BY пересекаются в точке P и вторично пересекают окружность ω в точках Q и R. Точка A' симметрична точке A относительно прямой CD. Окружность γ, описанная около треугольника PQR, пересекает окружность, описанную около треугольника $A'XY$, в двух точках. Докажите, что их можно назвать M и N так, чтобы прямые CM и DN пересекались на окружности γ.