Всероссийская олимпиада школьников по математике

9 класс, региональный этап, 2020/21 год

Первый день

1. Ослик Иа-Иа составил из шести палочек два треугольника. Затем он разобрал треугольники обратно и покрасил шесть палочек в два цвета: три самых коротких — в жёлтый цвет, а три остальных — в зелёный. Обязательно ли ослику удастся составить два треугольника, один — из трёх жёлтых палочек, а другой — из трёх зелёных?

2. Ненулевые числа x и y удовлетворяют неравенствам $x^2 - x > y^2$ и $y^2 - y > x^2$. Какой знак может иметь произведение xy?

3. Рассмотрим такие натуральные числа a, b и c, что дробь

$$k = \frac{ab + c^2}{a + b}$$

является натуральным числом, меньшим a и b. Какое наименьшее количество натуральных делителей может быть у числа $a + b$?

4. Окружности Ω и ω касаются друг друга внутренним образом в точке A. Проведем в большей окружности Ω хорду CD, касающуюся ω в точке B (хорда AB не является диаметром ω). Точка M — середина отрезка AB. Докажите, что окружность, описанная около треугольника CMD, проходит через центр ω.

5. Петя и Вася играют на доске 100×100. Изначально все клетки доски белые. Каждым своим ходом Петя красит в чёрный цвет одну или несколько белых клеток, стоящих подряд по диагонали. Каждым своим ходом Вася красит в черный цвет одну или несколько белых клеток, стоящих подряд по вертикали. (На рисунке справа показаны возможные первые ходы Пети и Васи на доске 4×4.) Первый ход делает Петя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

	П		В
П			В
			В

Второй день

6. Десятизначные натуральные числа a, b, c таковы, что $a+b=c$. Какое наибольшее количество из 30 их цифр могут оказаться нечётными?

7. Вася записал в клетки таблицы 9×9 натуральные числа от 1 до 81 (в каждой клетке стоит по числу, все числа различны). Оказалось, что любые два числа, отличающихся на 3, стоят в соседних по стороне клетках. Верно ли, что обязательно найдутся две угловых клетки, разность чисел в которых делится на 6?

8. Дана трапеция $ABCD$ с основаниями AD и BC. Оказалось, что точка пересечения медиан треугольника ABD лежит на биссектрисе угла BCD. Докажите, что точка пересечения медиан треугольника ABC лежит на биссектрисе угла ADC.

9. В алфавите $n>1$ букв; *словом* является каждая конечная последовательность букв, в которой любые две соседние буквы различны. Слово называется *хорошим*, если из него нельзя вычеркнуть все буквы, кроме четырёх, так, чтобы осталась последовательность вида $aabb$, где a и b — различные буквы. Найдите наибольшее возможное количество букв в хорошем слове.

10. Витя записал в тетрадь n различных натуральных чисел. Для каждой пары чисел из тетради он выписал на доску их наименьшее общее кратное. Могло ли при каком-то $n>100$ случиться так, что $\frac{n(n-1)}{2}$ чисел на доске являются (в некотором порядке) последовательными членами непостоянной арифметической прогрессии?