Всероссийская олимпиада школьников по математике

11 класс, региональный этап, 2020/21 год

Первый день

1. Натуральное число, большее 1000000, даёт одинаковые остатки при делении на 40 и на 625. Какая цифра может стоять у этого числа в разряде тысяч?

2. Ненулевые числа x и y удовлетворяют неравенствам $x^4 - y^4 > x$ и $y^4 - x^4 > y$. Какой знак может иметь произведение xy (укажите все возможности)?

3. На оси Ox отметили точки 0, 1, 2, ..., 100 и нарисовали графики 200 различных квадратичных функций, каждый из которых проходит через две из отмеченных точек и касается прямой $y = -1$. Для каждой пары графиков Олег написал на доске число, равное количеству общих точек этих графиков. После чего он сложил все 19900 чисел, написанных на доске. Мог ли он получить число 39699?

4. Треугольная пирамида $SABC$ вписана в сферу Ω. Докажите, что сферы, симметричные Ω относительно прямых SA, SB, SC и плоскости ABC, имеют общую точку. Сфера, симметричная данной относительно прямой ℓ — это сфера такого же радиуса, центр которой симметричен центру исходной сферы относительно прямой ℓ.

5. В Цветочном городе живёт 99^2 коротышек. Некоторые из коротышек рыцари (всегда говорят правду), а остальные — лжецы (всегда лгут). Дома в городе расположены в клетках квадрата 99×99 (всего 99^2 домов, расположенных в 99 вертикальных и в 99 горизонтальных улицах). В каждом доме живет ровно один коротышка. Номер дома обозначается парой чисел $(x; y)$, где$1 \leqslant x \leqslant 99$ — номер вертикальной улицы (номера возрастают слева направо), а $1 \leqslant y \leqslant 99$ — номер горизонтальной улицы (номера возрастают снизу вверх). *Цветочным расстоянием* между двумя домами с номерами $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$ называется число $\rho = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$. Известно, что на каждой улице — вертикальной или горизонтальной — проживает не менее k рыцарей. Кроме того, все коротышки знают, в каком доме живет рыцарь Знайка. Вы хотите найти его дом, но не знаете, как выглядит Знайка. Вы можете подходить к любому дому и спрашивать живущего в нем коротышку: «Каково цветочное расстояние от вашего дома до дома Знайки?». При каком наименьшем k вы можете гарантированно найти дом Знайки?

Второй день

6. Вася записал в клетки таблицы 9×9 натуральные числа от 1 до 81 (в каждой клетке стоит по числу, все числа различны). Оказалось, что любые два числа, отличающихся на 3, стоят в соседних по стороне клетках. Верно ли, что обязательно найдутся две угловых клетки, разность чисел в которых делится на 6?

7. Пусть I — центр вписанной окружности остроугольного треугольника ABC, M и N — точки касания вписанной окружности сторон AB и BC соответственно. Через точку I проведена прямая ℓ, параллельная стороне AC, и на неё опущены перпендикуляры AP и CQ. Докажите, что точки M, N, P и Q лежат на одной окружности.

8. В алфавите $n > 1$ букв; *словом* является каждая конечная последовательность букв, в которой любые две соседние буквы различны. Слово называется *хорошим*, если из него нельзя вычеркнуть все буквы, кроме четырёх, так, чтобы осталась последовательность вида $aabb$, где a и b — различные буквы. Найдите наибольшее возможное количество букв в хорошем слове.

9. Многочлен $P(x)$ с вещественными коэффициентами имеет степень 10^5, а его старший коэффициент равен 1. Найдите наименьшую возможную степень многочлена

$$R(x) = P\left(x^{1000} + 1\right) - P(x)^{1000}.$$

10. На доску записали три рациональных положительных числа. Каждую минуту числа x, y, z на доске стираются, а вместо них выписываются числа $x + \frac{1}{yz}$, $y + \frac{1}{zx}$, $z + \frac{1}{xy}$. Докажите, что начиная с некоторого момента на доске не будет появляться целых чисел.