Всероссийская олимпиада школьников по математике

10 класс, региональный этап, 2020/21 год

Первый день

1. Первоклассник составил из шести палочек два треугольника. Затем он разобрал треугольники обратно и разбил шесть палочек на две группы по три палочки: в первой группе оказались три самых длинных палочки, а во второй — три самых коротких. Обязательно ли можно составить треугольник из трех палочек первой группы? А из трех палочек второй группы?

2. Ненулевые числа x и y удовлетворяют неравенствам $x^4 - y^4 > x$ и $y^4 - x^4 > y$. Может ли произведение xy равняться отрицательному числу?

3. Пусть S — множество, состоящее из натуральных чисел. Оказалось, что для любого числа a из множества S существуют два числа b и c из множества S такие, что $a = \frac{b(3c-5)}{15}$. Докажите, что множество S бесконечно.

4. Вписанная окружность касается сторон AB, BC и CA неравнобедренного треугольника ABC в точках C_1, A_1 и B_1 соответственно. Пусть m — средняя линия треугольника $A_1B_1C_1$, параллельная стороне B_1C_1. Биссектриса угла $B_1A_1C_1$ пересекает m в точке K. Докажите, что описанная окружность треугольника BCK касается m.

5. Петя и Вася играют на доске 100×100. Изначально все клетки доски белые. Каждым своим ходом Петя красит в чёрный цвет одну или несколько белых клеток, стоящих подряд по диагонали. Каждым своим ходом Вася красит в чёрный цвет одну или несколько белых клеток, стоящих подряд по вертикали. (На рисунке справа показаны вохможные первые ходы Пети и Васи на доске 4×4.) Первый ход делает Петя. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре?

	П		В
П			В
			В

Второй день

6. На доску выписали три натуральных числа: два десятизначных числа a и b, а также их сумму $a+b$. Какое наибольшее количество нечетных цифр могло быть выписано на доске?

7. Вася записал в клетки таблицы 9×9 натуральные числа от 1 до 81 (в каждой клетке стоит по числу, все числа различны). Оказалось, что любые два числа, отличающихся на 3, стоят в соседних по стороне клетках. Верно ли, что обязательно найдутся две угловых клетки, разность чисел в которых делится на 6?

8. Точка M — середина основания AC равнобедренного треугольника ABC. На продолжении отрезков AC и BC за точку C отмечены точки D и K соответственно так, что $BC = CD$ и $CM = CK$. Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABD и MCK, касаются.

9. Фокусник с помощником собираются показать следующий фокус. У них есть $n \geqslant 3$ карточек с номерами $1, 2, \ldots, n$, и ряд из n клеток размером в карточку. Оборотные стороны всех карточек неразличимы. Зритель выкладывает на некоторые два места карточки 1 и 2; помощник фокусника, видя это, выкладывает на свободные места остальные карточки. Затем все карточки переворачиваются числами вниз, и входит фокусник. Он переворачивает одну из карточек, а затем зритель переворачивает другую. После этого фокусник должен правильно указать карточку 1 и правильно указать карточку 2. При каких n фокусник и помощник смогут договориться так, чтобы гарантированно фокус удался?

10. Витя записал в тетрадь n различных натуральных чисел. Для каждой пары чисел из тетради он выписал на доску их наименьшее общее кратное. Могло ли при каком-то $n > 100$ случиться так, что $\frac{n(n-1)}{2}$ чисел на доске являются (в некотором порядке) последовательными членами непостоянной арифметической прогрессии?